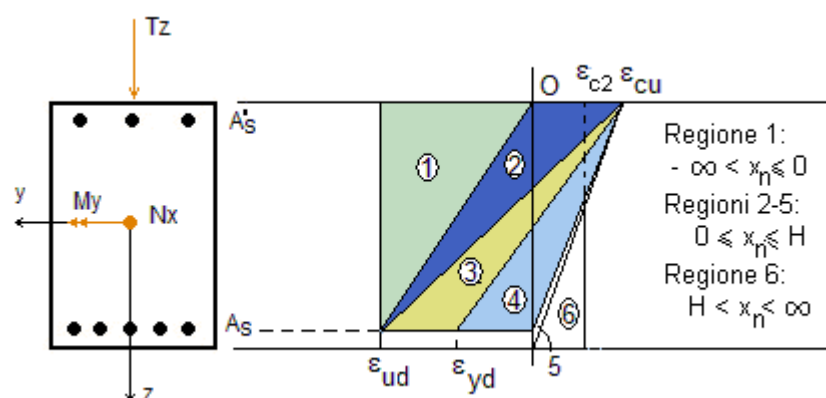
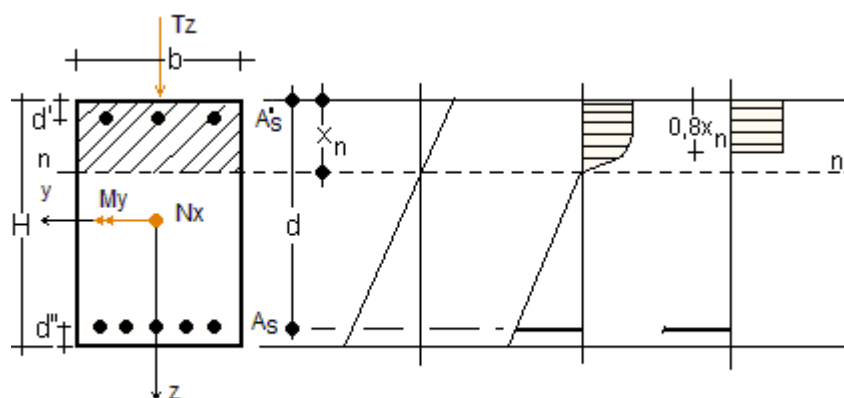
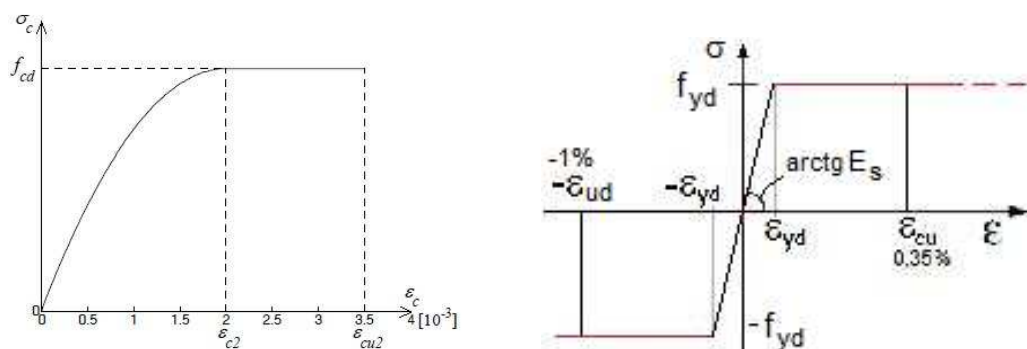


APPUNTI DI TECNICA DELLE COSTRUZIONI

LA TEORIA SEMIPROBABILISTICA ED IL CALCOLO AGLI STATI LIMITE STRUTTURE IN CEMENTO ARMATO



(Autore: Ing. Mario Zafonte)

INDICE

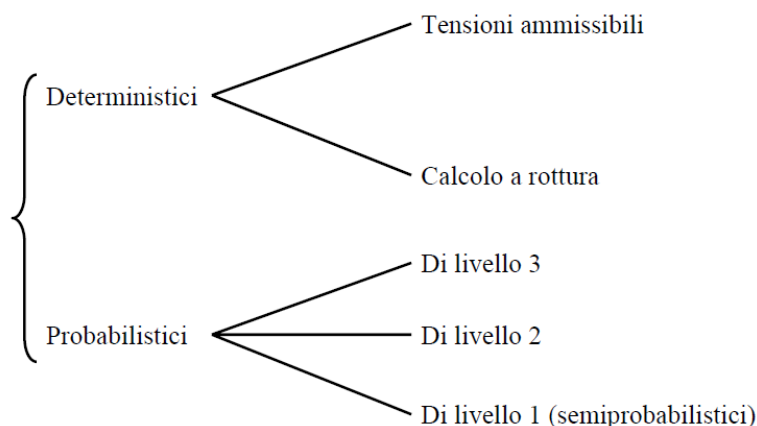
1. Premessa.....	3
2. Metodi di misura della sicurezza nelle costruzioni	3
2.1. Metodo delle Tensioni Ammissibili	3
2.2. Metodo Probabilistico	4
3. Statistica Matematica	6
3.1. Valore Medio	7
3.2. Varianza del campione	7
3.3. Deviazione Standard	7
3.4. Frequenza Cumulativa	8
3.5. Funzione Densità di Probabilità e Ripartizione di Probabilità	9
4. Variabile Aleatoria Gaussiana.....	10
5. Teoria Probabilistica e Meccanica delle Strutture.....	12
6. Variabile Aleatoria Gaussiana Standardizzata VAGS.....	14
7. Frattili – Valori Caratteristici	16
8. Metodo Semiprobabilistico	19
8.1. Valore Caratteristico delle Resistenze.....	19
8.2. Valore Caratteristico delle Azioni	19
8.3. D.M. 14/01/2008	20
8.3.1. Valori di Calcolo delle Resistenze dei Materiali.....	20
8.3.1.1. Resistenze di calcolo dei materiali (art. 4.1.2.1.1).....	20
8.3.1.2. Resistenza di calcolo a compressione del calcestruzzo.....	20
8.3.1.3. Resistenza di calcolo a trazione del calcestruzzo.....	20
8.3.1.4. Resistenza di calcolo dell'acciaio	21
8.3.1.5. Tensione tangenziale di aderenza acciaio-calcestruzzo	21
8.3.2. Resistenza a sforzo normale e flessione (elementi monodimensionali)	21
8.3.3. Resistenza nei confronti di sollecitazioni taglienti	23
9. STATI LIMITE PER LE TRAVI.....	26
9.1. Stato Limite Ultimo per Sforzo Normale e Flessione	27
9.1.1. Costruzione Dominio Resistenza	32
9.1.2. Verifica della sezione	46
9.2. SLU per Sforzo Normale e Flessione sezione Rettangolare.....	48
9.2.1. Dominio di Rottura	50
9.2.2. Verifica della Sezione	51
9.3. SLU per Sforzo Normale e Flessione sezione a T.....	52
9.3.1. Dominio di Rottura	54
9.4. SLU per Sforzo Normale e Flessione - Metodo Numerico	55
9.4.1. Confronto tra metodo matematico e metodo numerico	58
9.4.1.1. Esempio 1 – Sezione Rettangolare	58
9.4.1.2. Esempio 2 – Sezione a T.....	61
9.5. SLU per Taglio.....	64

9.5.1. D.M. 2008 Art. 4.1.2.1.3 - Resistenza nei confronti di sollecitazioni taglienti	65
9.6. Stati Limite di Esercizio	67
9.6.1. Stato Limite di Fessurazione	67
9.6.1.1. Stato Limite di Apertura delle Fessure	68
9.6.2. DM 2008 art.4.1.2.2.4.1 - Definizione degli Stati Limite di fessurazione	72
9.6.3. DM.2008 art. 4.1.2.2.5 - Verifica delle tensioni di esercizio	75
10. D.M. 2008 Art. 7.4.6.1 - Limitazioni geometriche	76
11. D.M. 2008 Art.4.1.6.1 - Armatura elementi monodimensionali (Travi , Pilastri)	77
12. D.M. 2008 Art.7.4.6.2 - Limitazioni di Armatura	78
13. Routine Visual Basic – Metodo Numerico Mario Zafonte	81
14. Bibliografia	83

1. Premessa

Con l'introduzione delle nuove "Norme Tecniche per le Costruzioni" di cui al **D.M. 14 gennaio 2008** i risultati dei calcoli che riguardano il progetto delle armature, la verifica delle tensioni di lavoro dei materiali e del terreno, etc. devono essere valutate in relazione agli stati limite che si possono verificare durante la vita nominale della struttura.

2. Metodi di misura della sicurezza nelle costruzioni



2.1. Metodo delle Tensioni Ammissibili

Con il metodo delle Tensioni Ammissibili, facendo preliminarmente ricorso ad un criterio di crisi puntuale del materiale, si misura e si controlla la sicurezza attraverso un semplice confronto tra la resistenza del materiale (ridotta mediante un adeguato coefficiente di sicurezza) e le massime tensioni (in valore assoluto) ingenerate nella struttura dalle azioni esterne, ottenute attraverso un'analisi in campo elastico lineare.

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{amm} = \frac{R_k}{\gamma}$$

Tale sicurezza la enunciamo quindi in campo deterministico, infatti tutte le quantità che entrano in gioco sono rappresentate da numeri ben precisi.

Come sappiamo invece, ad esempio, se prendiamo n cubetti di calcestruzzo (confezionati allo stesso modo) e li sottoponiamo a compressione, non si ottiene mai lo stesso valore di rottura, per cui non si può avere la certezza sul massimo valore della tensione sopportabile dal nostro cubetto.

Il metodo deterministico delle Tensioni Ammissibili presenta inoltre altri difetti, tra cui:

- *Arbitrarietà del coefficiente di sicurezza*
Il coefficiente di sicurezza γ , deve essere necessariamente ampio per coprire tutte le incertezze (effetto psicologico);
- *Onerosità del criterio di misura della sicurezza*
Ci si limita a controllare le tensioni nelle fibre di un limitato numero di sezioni (quelle maggiormente sollecitate) restando largamente ed anti economicamente al di sotto dei valori ammissibili convenzionali nella maggior parte della rimanente struttura;

- *Non si valutano le condizioni di esercizio*
Non si conosce la vita della struttura dopo la crisi;
- *Le forze considerate hanno valori ben precisi*
Non si tiene conto del fatto che le forze applicate alla struttura, per un qualsiasi evento, possono anche cambiare durante la vita della struttura stessa. Inoltre, non si conosce il valore massimo che tali forze possono avere affinché la struttura continui a resistere.

Si deve riconoscere quindi che non può esistere la sicurezza assoluta, misurata per via deterministica, in quanto i parametri che concorrono alla formazione dell'oggetto "struttura" sono tutti affetti da più o meno spiccate aleatorietà.

2.2. Metodo Probabilistico

Con il metodo probabilistico, la pronuncia della sicurezza viene fatta verificando che: "la probabilità di collasso cui è soggetta la struttura è minore di un certo numero ε (fissato dal legislatore)

$$P_c < \varepsilon$$

dove P_c è un funzionale che dipende da un certo numero (discreto e/o elevato) di funzioni che sono *variabili aleatorie*.

In poche parole, la differenza tra il metodo deterministico ed il metodo probabilistico, nasce dal fatto che gli "ingredienti" che concorrono alla formazione del giudizio sulla sicurezza, nel metodo deterministico sono delle grandezze che hanno degli espressi valori numerici, mentre nel metodo probabilistico sono delle funzioni.

Alla data odierna, osserviamo però che il metodo probabilistico, è di difficile applicazione in quanto:

- a) non tutte le funzioni di probabilità delle variabili aleatorie che concorrono alla determinazione della sicurezza strutturale sono note;
- b) ammesso di conoscere tutte le funzioni, l'elaborazione per arrivare alla pronuncia di sicurezza è dispendiosa e complicata.

Solo a scopo di conoscenza, si precisa che alla data attuale, sono noti tre livelli di analisi probabilistica:

- Livello 1 (o livello Europeo) detto anche semiprobabilistico;
- Livello 2 (o livello Americano);
- Livello 3 (o livello Completo);

Nel livello 1, detto anche semiprobabilistico, gli aspetti probabilistici vengono messi in conto mediante l'introduzione dei *Valori Caratteristici* delle Azioni e delle resistenze dei materiali.

Nel livello 2, le funzioni che devono descrivere le variabili aleatorie non entrano come tali ma entrano con due numeri:

- a) valor medio della variabile aleatoria;
- b) deviazione standard della variabile aleatoria.

Il livello 3 è quello in cui la sicurezza si enuncia introducendo direttamente le funzioni di probabilità delle variabili aleatorie.

Poiché, come indicato nel § 2.3 “*Valutazione della Sicurezza*” del D.M. 14 gennaio 2008:

Per la valutazione della sicurezza delle costruzioni si devono adottare criteri probabilistici scientificamente comprovati. Nel seguito sono normati i criteri del metodo semiprobabilistico agli stati limite basati sull’impiego dei coefficienti parziali di sicurezza, applicabili nella generalità dei casi; tale metodo è detto di primo livello. Per opere di particolare importanza si possono adottare metodi di livello superiore, tratti da documentazione tecnica di comprovata validità.

Nel metodo semiprobabilistico agli stati limite, la sicurezza strutturale deve essere verificata tramite il confronto tra la resistenza e l’effetto delle azioni. Per la sicurezza strutturale, la resistenza dei materiali e le azioni sono rappresentate dai valori caratteristici, R_{ki} e F_{kj} definiti, rispettivamente, come il frattile inferiore delle resistenze e il frattile (superiore o inferiore) delle azioni che minimizzano la sicurezza. In genere, i frattili sono assunti pari al 5%. Per le grandezze con piccoli coefficienti di variazione, ovvero per grandezze che non riguardino univocamente resistenze o azioni, si possono considerare frattili al 50% (valori mediani).

La verifica della sicurezza nei riguardi degli stati limite ultimi di resistenza si effettua con il “metodo dei coefficienti parziali” di sicurezza espresso dalla equazione formale:

$$R_d \geq E_d \quad (2.2.1)$$

dove

R_d è la resistenza di progetto, valutata in base ai valori di progetto della resistenza dei materiali e ai valori nominali delle grandezze geometriche interessate;

E_d è il valore di progetto dell’effetto delle azioni, valutato in base ai valori di progetto $F_{dj} = F_{kj} \cdot \gamma_{Fj}$ delle azioni come indicato nel § 2.5.3, o direttamente $E_{dj} = E_{kj} \gamma_{Ej}$.

I coefficienti parziali di sicurezza, γ_{Mi} e γ_{Fj} , associati rispettivamente al materiale i-esimo e all’azione j-esima, tengono in conto la variabilità delle rispettive grandezze e le incertezze relative alle tolleranze geometriche e alla affidabilità del modello di calcolo.

La verifica della sicurezza nei riguardi degli stati limite di esercizio si esprime controllando aspetti di funzionalità e stato tensionale.

nel seguito verrà descritto in dettaglio il metodo semiprobabilistico e le verifiche agli stati limite.

Solo a scopo di completezza e per meglio chiarire alcuni concetti che si utilizzano correntemente nel metodo semiprobabilistico, si ritiene preliminarmente utile introdurre delle nozioni di statistica matematica.

3. Statistica Matematica

La statistica matematica, fondamentalmente può essere considerata una scienza che si occupa della lettura e della progettazione di esperimenti fisici.

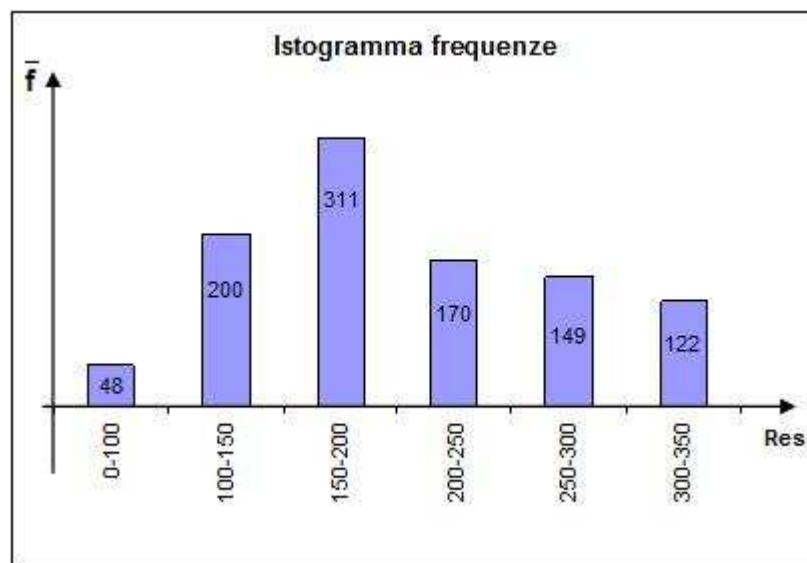
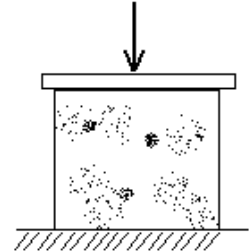
Supponiamo ad es. che l'esperimento fisico sia quello di misurare la Resistenza a Compressione di un cubetto di calcestruzzo.

Osserviamo subito che questo esperimento lo possiamo considerare come un campione estratto dalla popolazione di tutte le prove standard che sono state fatte nel mondo su questo tipo di cubetto.

Supponiamo che l'ampiezza di questo campione sia $N=1000$, l'evento sarà la misura di una certa resistenza su un certo provino.

Naturalmente avrò tanti eventi quanto è grande il campione. Lo spazio campione è cioè tanto grande da contenere il numero degli eventi.

Per organizzare i risultati posso procedere in vari modi, un primo modo può essere quello di elencarli così come li ho misurati, però tale organizzazione sarebbe di poca utilità. Un altro modo di organizzare i risultati è quello di disegnare gli istogrammi delle frequenze assolute per classi di eventi, ossia, ad es.:



Un evento è ad es. $100 \leq R \leq 150$

La frequenza assoluta di questo evento è il numero di volte che la resistenza misurata (tra le 1000 misure) non è più piccola di 100 e non è più grande di 150:

$$\bar{f}(A) = 200 \quad \text{per } 100 \leq R \leq 150$$

Un'altro evento è ad es. $150 \leq R \leq 200$, per il quale si ha: $\bar{f}(A') = 311$

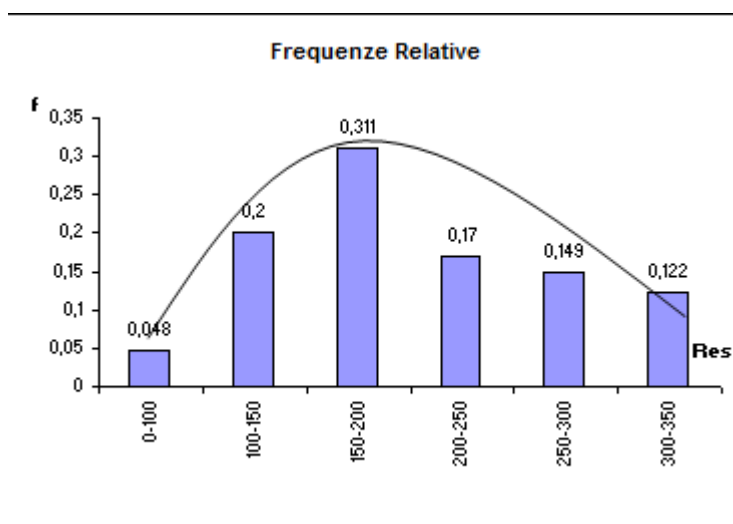
La somma delle frequenze assolute ovviamente sarà pari all'ampiezza del campione $N=1000$.

Oltre a rappresentare i risultati mediante le frequenze assolute, è possibile rappresentare gli stessi mediante le frequenze relative che si ottengono a partire da quelle assolute dividendo per l'ampiezza del campione:

$$f(A) = \frac{\bar{f}(A')}{N}$$

Nel caso in esame, ad es. la frequenza relativa legata all'evento $100 \leq R \leq 150$ è pari a: $f(A)=200/1000$.

Si osservi che l'istogramma delle frequenze relative è simile a quello delle frequenze assolute, anche se rappresentano valori diversi, ed entrambi si adattano su una curva.



L'area sottesa nel diagramma delle frequenze relative vale 1, vale N nel diagramma delle frequenze assolute.

3.1. Valore Medio

Dato un certo campione, si definisce valore medio del campione il rapporto tra la sommatoria dei risultati degli eventi e l'ampiezza del campione:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N}$$

3.2. Varianza del campione

Si definisce Varianza del campione il rapporto:

$$s^2 = \frac{1}{(N-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

3.3. Deviazione Standard

Si definisce deviazione standard del campione, la radice quadrata positiva della varianza. La deviazione standard viene espressa nella stessa unità di misura del singolo evento (x_i), nel caso in esame ad es. viene espressa in kg/cm^q.

$$s = \sqrt{\frac{1}{(N-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

In particolare si osservi che la deviazione standard misura “la dispersione dei risultati rispetto al valor medio” degli stessi. Maggiore è l’ampiezza del campione (e quindi più accurato è l’esperimento) e minore è la deviazione standard.

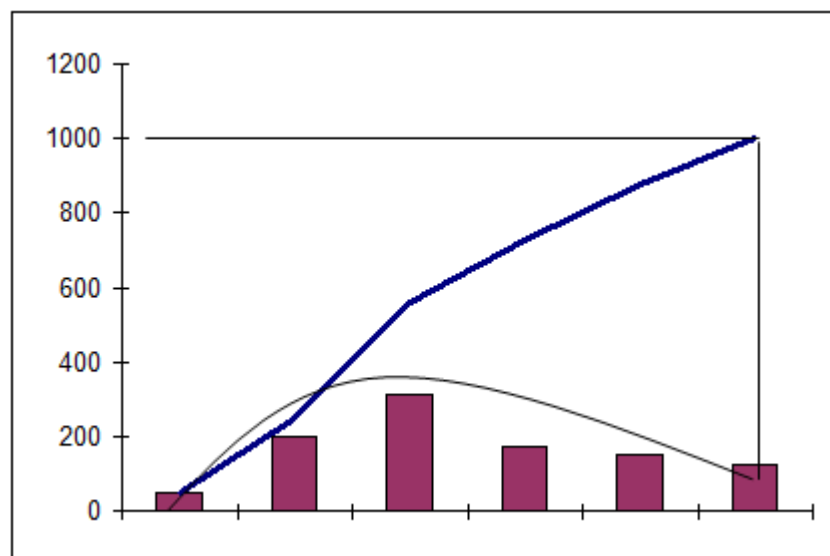
3.4. **Frequenza Cumulativa**

Altra importante funzione utilizzata in statistica è la frequenza cumulativa la quale è definita per ogni classe di evento ed è pari alla somma delle frequenze assolute delle classi di evento precedenti:

$$\overline{F}_j = \sum_{i=1}^j \overline{f}_i$$

Ad es. nel caso dell’esperimento in esame, per la classe di evento j-esima: 0-300, risulta:

$$\overline{F}_{300} = 48 + 200 + 311 + 170 + 149 = 878$$



Il diagramma delle frequenze cumulative assolute è dunque la curva integrale del diagramma di $\overline{f}$.

In un punto qualsiasi delle ascisse, la corrispondente ordinata rappresenta la somma delle aree precedenti. Nel punto finale l’ordinata vale N oppure 1 a seconda se rappresenta la Frequenza Cumulativa delle frequenze assolute o la Frequenza Cumulativa delle frequenze relative.

3.5. **Funzione Densità di Probabilità e Ripartizione di Probabilità**

Data una certa variabile aleatoria $X(\omega)$, la stessa può considerarsi definita quando si conosce la relativa funzione che:

- ci consente di determinare la probabilità per il singolo avvenimento:

$$P[\omega: X(\omega) = x] = P(X = x)$$

- ci consente di determinare la probabilità che la stessa non sia maggiore di un certo valore x :

$$P[\omega: X(\omega) \leq x] = P(X \leq x)$$

Nota tale funzione, osserviamo che se la V.A. è definita in uno spazio continuo, la probabilità $P(X = x)$ è pari ad $f(x)dx$:

$$P(X = x) = f(x)dx$$

Dove

X è la variabile aleatoria;
 x è lo stato variabile (scalare, numero reale)
 $f(x)$ è la Funzione densità di probabilità.

Si ha inoltre:

$$P(X \leq x) = F(x)$$

Dove $F(x)$ è detta Funzione di Ripartizione della Probabilità.

La F.D.P. e la F.R.P. sono legate dalla relazione:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

E quindi:

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx$$

4. Variabile Aleatoria Gaussiana

A seconda del tipo di fenomeno fisico, varie sono le leggi matematiche che possono definire la relativa variabile aleatoria. Una delle funzioni più semplici è quella proposta da GAUSS, la quale fra l'altro è quella più usata per definire le variabili aleatorie che attengono a problemi ingegneristici.

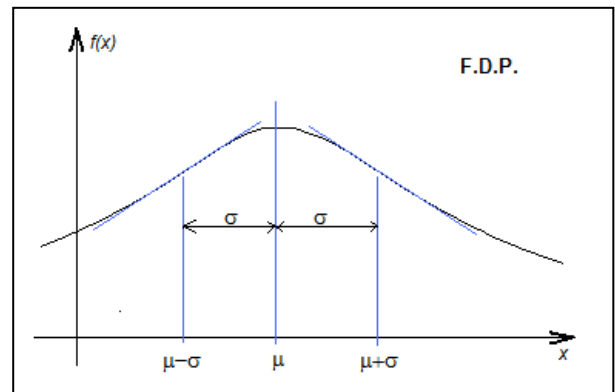
Secondo Gauss la *funzione densità di probabilità* di una variabile aleatoria (che in questo caso prende il nome di Variabile Aleatoria Gaussiana) è data dall'espressione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]; \quad -\infty \leq x \leq +\infty$$

Dove

μ è il valore medio

σ è la deviazione standard

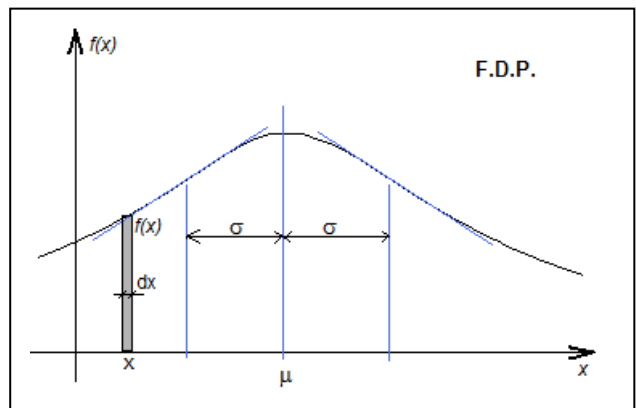


Nota la F.D.P. osserviamo adesso che è possibile definire la Variabile Aleatoria, infatti, assegnato un qualunque numero reale x (che esprime lo stato variabile della nostra variabile aleatoria) in corrispondenza di questo valore ho la funzione $f(x)$ che moltiplicata per dx mi esprime la probabilità che $X=x$:

$$P(X = x) = f(x)dx$$

l'areola marcata in figura rappresenta la probabilità che la mia variabile aleatoria assuma proprio il valore x .

Come si evince dalla rappresentazione grafica della funzione $f(x)$ di una V.A.G. la stessa è simmetrica rispetto l'asse passante per il valore medio m , inoltre vale 0 per $x = -\infty$ e per $x = +\infty$.

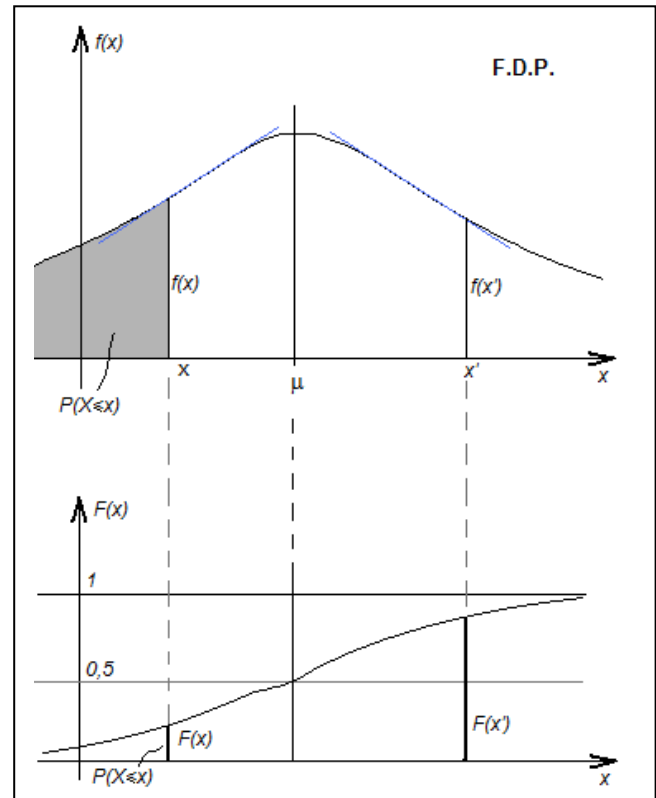


Osserviamo inoltre che, l'integrale tra $-\infty$ e x della funzione densità di probabilità, ossia la Funzione di Ripartizione della Probabilità (area evidenziata in figura),

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

rappresenta la probabilità che X non sia più grande di x :

$$P(X \leq x) = F(x)$$



5. Teoria Probabilistica e Meccanica delle Strutture

Nelle rappresentazioni delle teorie probabilistiche alla meccanica delle strutture, per rappresentare i fenomeni con essa connessi, è importante conoscere una o più funzioni che possano descrivere la variabile aleatoria associata.

Tra queste funzioni quella generalmente adottata è la variabile aleatoria gaussiana VAG la quale ad es. esprime bene il lancio di artiglieria, mentre da dei risultati meno precisi, ma accettati dal legislatore, per la prova di schiacciamento dei cubetti di cls.

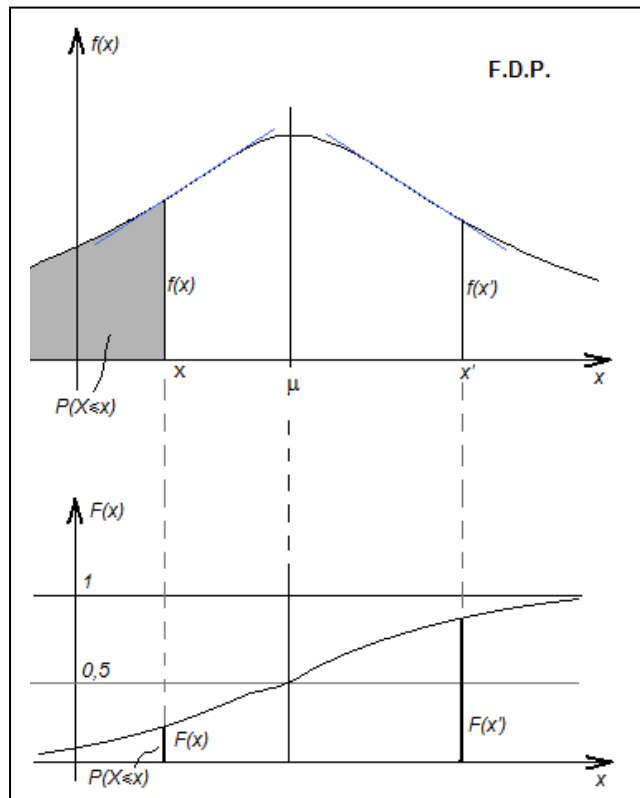
In questo caso la FDP (funzione densità di probabilità) e la FRP (funzione ripartizione di probabilità) assumono la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dt$$

Le quali rappresentate nel piano cartesiano mostrano l'andamento di cui in figura.

Si osservi che la curva rappresentativa della FDP è simmetrica rispetto all'asse passante per μ , inoltre la distanza del punto di flesso dell'asse mediano vale σ . La VAG è dunque individuabile tramite i due parametri μ e σ .



Assegnato un certo valore x dello stato variabile,

- l'ordinata che si ha in corrispondenza di x nel primo diagramma ci esprime la funzione densità $f(x)$;

- il prodotto $f(x)dx$ esprime la probabilità che la X sia compresa tra x e $x+dx$:

$$f(x)dx = P(x \leq X \leq x+dx)$$

- l'area evidenziata nel diagramma di $f(x)$ esprime un numero compreso tra 0 e 1, esprime la funzione ripartizione $F(x)$ e rappresenta la probabilità che $X \leq x$:

$$F(x) = P(X \leq x) = p$$

- l'area rimanente (non evidenziata) esprime ovviamente la probabilità che $X \geq x$, per cui essendo tutta l'area racchiusa da $f(x)$ pari ad 1, si ha:

$$P(X \leq x) + P(X \geq x) = 1$$

Problema

Data una V.A.G. X , determinare il numero a tale che la probabilità che $X < a$ sia pari a p : $P(X \leq a) = p$

Soluzione

Nota la funzione densità di probabilità $f(x)$, risulta:

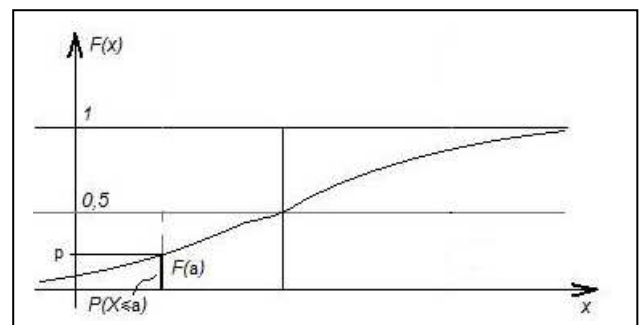
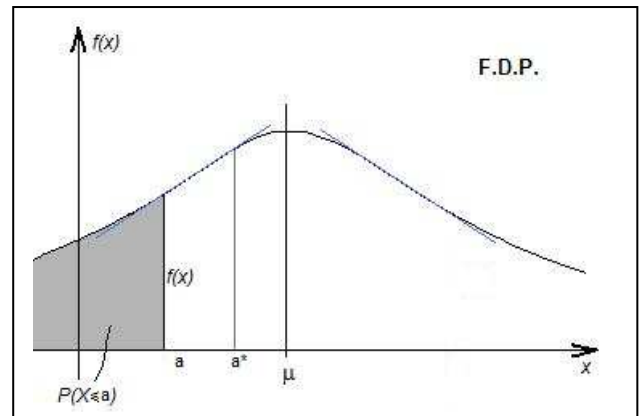
$$p = \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

la quale è un'equazione integrale nella sola incognita a , risolta la quale si determina il valore di a tale che $P(X \leq a) = p$.

Nel caso in cui non conosciamo la tecnica di risoluzione dell'equazione integrale, possiamo procedere per tentativi.

Si fissa un certo valore a^* e si calcola l'area compresa tra $-\infty$ ed a^* , se quest'area coincide con p allora si è trovato il valore di $a = a^*$, in caso contrario si procede per tentativi diminuendo e/o aumentando a^* fino a trovare l'area pari a p .

Se invece è nota la funzione ripartizione di probabilità, tramite il suo diagramma si determina subito a , fissando il valore p nelle ordinate.



6. Variabile Aleatoria Gaussiana Standardizzata VAGS

Ai fini computazionali può essere utile operare con la particolare variabile aleatoria gaussiana Z , definita dai parametri:

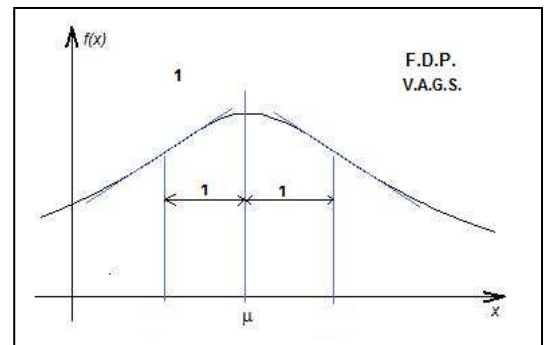
- valor medio nullo
- deviazione standard unitaria

la quale è nota come Variabile Aleatoria Gaussiana Standardizzata: VAGS. In questo caso, la descrizione della V.A. viene effettuata mediante la FDP:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) = \sigma f(x)$$

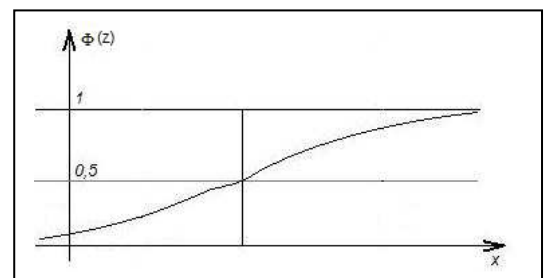
in cui z esprime lo stato variabile della VAGS Z pari a:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$



La relativa FRP è fornita dall'integrale definito:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \phi(t) dt = \sigma F(x)$$



Problema

Data una V.A.G. X , determinare il valore di x tale che X abbia la probabilità q di non superarlo:

$$P(X \leq x) = q$$

Soluzione

Anziché lavorare con la VAG il problema può risolversi utilizzando la corrispondente VAGS operando un cambiamento di variabile.

La funzione $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \phi(t) dt = \sigma F(x)$, può anche esprimersi mediante la seguente espressione ricavata dal

ricercatore americano Abramonis:

$$\Phi(z) = 1 - \phi(z) \sum_{i=1}^5 b_i \cdot t^i$$

Dove :

$$t = \frac{1}{1 + 0,2316419 \cdot z}$$

$$b_1 = 0,319381530$$

$$b_2 = -0,356563782$$

$$b_3 = 1,781477937$$

$$b_4 = -1,821255978$$

$$b_5 = 1,330274429$$

Per determinare x , osserviamo che determinando il valore di z tale che Z abbia la probabilità q di non maggiorarlo: $P(Z \leq z) = q$, dalla relazione $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ si ricava: $x = z\sigma + \mu$

Per ricavare z , si osservi che dalla relazione:

$$q = \int_{-\infty}^z \phi(t) dt = \Phi(z)$$

utilizzando l'espressione di Abramonis per $\Phi(z)$, si ha:

$$q = 1 - \phi(z) \sum_{i=1}^5 b_i \cdot t^i = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \cdot (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5)$$

da cui è possibile ricavare z (per tentativi, vedi esempio par.7).

7. Frattili – Valori Caratteristici

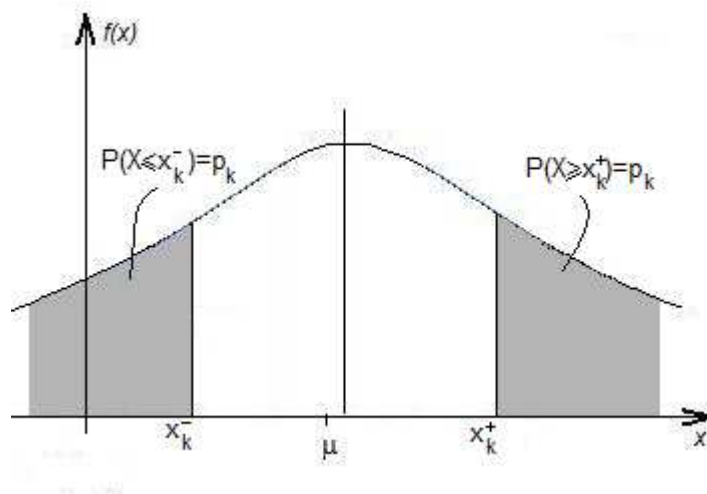
Data una V.A. si definisce frattile o percentile di ordine p quel valore dello stato variabile che ha la probabilità p di non essere maggiorato.

Il frattile di ordine 100% è $+\infty$, il frattile di ordine 0 è $-\infty$, il frattile di ordine 0,5 è μ .

Nota la funzione $f(x)$, individuata dalla coppia di parametri (μ, σ) , si possono definire i “valori caratteristici” della V.A. introducendo il concetto di :

- frattile inferiore x_k^-
- frattile superiore x_k^+

Entrambi di ordine k , da intendere come quei valori che, rispettivamente hanno la probabilità P_k assegnata di essere “minorato” il primo oppure “maggiorato” il secondo.



Il Frattile Inferiore x_k^- di ordine k , cioè quel particolare valore dello stato variabile che ha la probabilità p_k di non essere maggiorato, è pertanto quel particolare valore dello stato variabile che soddisfa la condizione:

$$p_k = P(X \leq x_k^-) = F(x_k^-) = \int_{-\infty}^{x_k^-} f(x) dx$$

Il Frattile Superiore x_k^+ di ordine k , cioè quel particolare valore dello stato variabile che ha la probabilità p_k di essere maggiorato, è pertanto quel particolare valore dello stato variabile che soddisfa la condizione:

$$p_k = P(X \geq x_k^+) = F(x_k^+) = \int_{x_k^+}^{\infty} f(x) dx$$

Per determinare il frattile superiore osserviamo inoltre che essendo:

$$\int_{-\infty}^{x_k^-} f(x) dx + \int_{x_k^+}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Risulta:

$$p_k = \int_{x_k^+}^{\infty} f(x) dx = 1 - \int_{-\infty}^{x_k^+} f(x) dx = 1 - F(x_k^+)$$

Dalla precedente relazione si ha inoltre:

$$1 - p_k = \int_{-\infty}^{x_k^-} f(x) dx = P(X \leq x_k^+)$$

La quale ci indica che il frattile superiore di una V.A. può essere preso come il frattile inferiore della probabilità complementare $(1-p_k)$ assegnata.

ESEMPIO

Calcolo del frattile di ordine q di una V.A. descritta da una legge gaussiana caratterizzata dai parametri assegnati (μ, σ) .

Per risolvere il problema dobbiamo determinare quel valore x_q tale che:

$$P(X \leq x_q) = q$$

e ciò può farsi risolvendo l'equazione integrale:

$$q = \int_{-\infty}^{x_q} f(x) dx$$

essendo:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Anziché risolvere l'equazione integrale, osserviamo però che sfruttando la legge della VAGS possiamo risolvere il problema risolvendo un'equazione algebrica.

A tale scopo, osserviamo che effettuato il cambiamento di variabile:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

essendo:

$$dz = \frac{1}{\sigma} dx \quad \text{e quindi} \quad dx = \sigma dz$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \phi(z)$$

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) = \sigma f(x)$$

Si ha:

$$q = \int_{-\infty}^{x_q} f(x) dx = \int_{-\infty}^{x_q} \frac{1}{\sigma} \phi(z) \sigma dz = \int_{-\infty}^{z_q} \phi(z) dz = \Phi(z_q)$$

Da cui, posto

$$\Psi(z_q) = \phi(z_q) \sum_{i=1}^5 b_i \cdot t^i$$

ed essendo:

$$\Phi(z_q) = 1 - \phi(z_q) \sum_{i=1}^5 b_i \cdot t^i$$

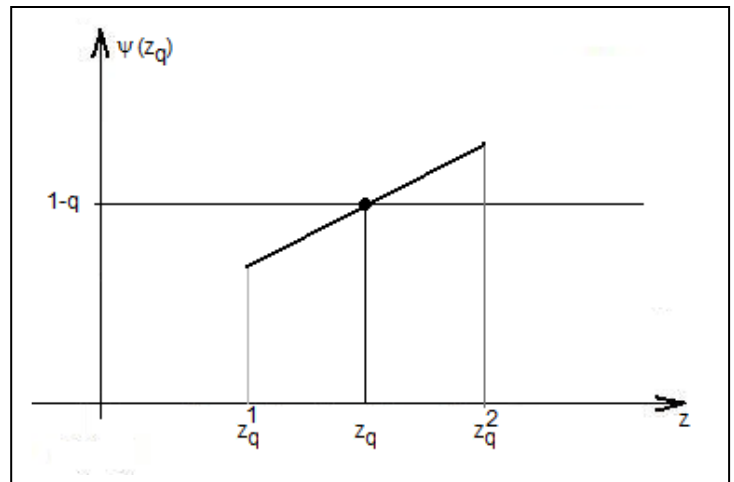
Risulta:

$$q = 1 - \Psi(z_q)$$

La quale è un'equazione algebrica non lineare, semplice da risolvere in quanto $\Psi(z_q)$ è una funzione a un sol valore.

Se riportiamo in un diagramma nelle ascisse il valore di z e nelle ordinate il valore di $\Psi(z_q)$, si può procedere nel seguente modo:

- si fissa l'ordinata $1 - q = \Psi(z_q)$
- si fissa un valore di tentativo z_q^1 si calcola il valore di $\Psi(z_q^1)$
- se il valore di $\Psi(z_q^1)$ è minore di $1 - q$, si fissa un'altro valore di tentativo z_q^2 e si calcola il valore di $\Psi(z_q^2)$
- se si trova che il valore di $\Psi(z_q^2)$ è maggiore di $1 - q$, è sufficiente unire i due valori trovati e si ottiene il valore di z_q .



Noto z_q , dalla $z = (x - \mu) / \sigma$ si ricava anche x_q , che si può mettere nella formula standard:

$$x_q = \mu + z_q \sigma$$

E' immediato riconoscere che la funzione $\Phi(z)$ gode delle proprietà:

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

per cui i frattili inferiore e superiore di una VAG possono mettersi nella forma:

$$\begin{cases} x_k^- = \mu + z_k \sigma \\ x_k^+ = \mu - z_k \sigma \end{cases}$$

In particolare osserviamo che per $q=k=5\%$, risulta $z_k = -1,645$ per cui, il frattile inferiore e superiore di ordine 5% sono:

$$\begin{cases} x_k^- = \mu - 1,645 \sigma \\ x_k^+ = \mu + 1,645 \sigma \end{cases}$$

8. Metodo Semiprobabilistico

Nel metodo semiprobabilistico o metodo probabilistico di 1° livello, data l'aleatorietà delle azioni e delle resistenze, le stesse vengono rappresentate come delle VAG.

Nell'eseguire le verifiche strutturali, però le stesse non entrano in gioco con le relative Funzioni (FDP o FRP) e neanche con i parametri rappresentativi delle stesse μ e σ , ma entrano in gioco con i rispettivi valori caratteristici.

8.1. Valore Caratteristico delle Resistenze

Il Valore Caratteristico delle resistenze è il frattile inferiore di ordine 5% della competente distribuzione.

Per determinare tale valore, si procede nel seguente modo:

Si eseguono un numero sufficiente di prove (ad es. per il cls. $N > 30$) e si determinano i valori:

- Valor Medio
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N}$$

- Deviazione Standard
$$s = \sqrt{\frac{1}{(N-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

dopo di che, assunti questi valori come stima di m e s si determina la FDP di tipo gaussiano ed infine si determina il valore caratteristico risolvendo il problema:

$$P(X \leq x_k^-) = 0,05$$

il quale come sappiamo è dato da:

$$x_k^- = \mu - k\sigma$$

dove $k=1,645$.

In particolare, indichiamo con:

- f_{ck} la resistenza caratteristica (k) nel conglomerato misurata su un provino cilindrico;
- R_{ck} la resistenza caratteristica (k) nel conglomerato misurata su un provino cubico;
- f_{yk} la resistenza caratteristica dell'acciaio al limite di snervamento;

8.2. Valore Caratteristico delle Azioni

Il Valore Caratteristico delle azioni è:

- il frattile di ordine 95% della competente distribuzione (indicato con F_k) se a svantaggio della sicurezza;
- il frattile di ordine 5% della competente distribuzione se a vantaggio della sicurezza;

8.3. D.M. 14/01/2008

Si riporta integralmente quanto indicato nel D.M. 2008, per ciò che attiene alle Resistenze dei Materiali e strutturale.

8.3.1. Valori di Calcolo delle Resistenze dei Materiali

8.3.1.1. Resistenze di calcolo dei materiali (art. 4.1.2.1.1)

In accordo con il Cap. 11, le resistenze di calcolo f_d indicano le resistenze dei materiali, calcestruzzo ed acciaio, ottenute mediante l'espressione:

$$f_d = f_k / \gamma_M \quad (4.1.3)$$

dove:

f_k sono le resistenze caratteristiche del materiale;

γ_M sono i coefficienti parziali per le resistenze, comprensivi delle incertezze del modello e della geometria, che possono variare in funzione del materiale, della situazione di progetto e della particolare verifica in esame.

8.3.1.2. Resistenza di calcolo a compressione del calcestruzzo

Per il calcestruzzo la resistenza di calcolo a compressione, f_{cd} , è:

$$f_{cd} = \alpha_{cc} \cdot f_{ck} / \gamma_C \quad (4.1.4)$$

dove:

α_{cc} è il coefficiente riduttivo per le resistenze di lunga durata;

γ_C è il coefficiente parziale di sicurezza relativo al calcestruzzo;

f_{ck} è la resistenza caratteristica cilindrica a compressione del calcestruzzo a 28 giorni.

Il coefficiente γ_C è pari ad 1,5; Il coefficiente α_{cc} è pari a 0,85.

Nel caso di elementi piani (solette, pareti, ...) gettati in opera con calcestruzzi ordinari e con spessori minori di 50 mm, la resistenza di calcolo a compressione va ridotta a $0,80f_{cd}$.

Il coefficiente γ_C può essere ridotto da 1,5 a 1,4 per produzioni continuative di elementi o strutture, soggette a controllo continuativo del calcestruzzo dal quale risulti un coefficiente di variazione (rapporto tra scarto quadratico medio e valor medio) della resistenza non superiore al 10%. Le suddette produzioni devono essere inserite in un sistema di qualità di cui al § 11.8.3.

8.3.1.3. Resistenza di calcolo a trazione del calcestruzzo

La resistenza di calcolo a trazione, f_{ctd} , vale:

$$f_{ctd} = f_{ctk} / \gamma_C \quad (4.1.5)$$

dove:

γ_C è il coefficiente parziale di sicurezza relativo al calcestruzzo già definito al § 4.1.2.1.1.1;

f_{ctk} è la resistenza caratteristica a trazione del calcestruzzo (§ 11.2.10.2).

Nel caso di elementi piani (solette, pareti, ...) gettati in opera con calcestruzzi ordinari e con spessori minori di 50 mm, la resistenza di calcolo a trazione va ridotta a $0,80f_{ctd}$.

Il coefficiente γ_C può essere ridotto, da 1,5 a 1,4 nei casi specificati al § 4.1.2.1.1.1.

8.3.1.4. Resistenza di calcolo dell'acciaio

La resistenza di calcolo dell'acciaio f_{yd} è riferita alla tensione di snervamento ed il suo valore è dato da:

$$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s \quad (4.1.6)$$

dove:

γ_s è il coefficiente parziale di sicurezza relativo all'acciaio;

f_{yk} per armatura ordinaria è la tensione caratteristica di snervamento dell'acciaio (v. § 11.3.2), per armature da precompressione è la tensione convenzionale caratteristica di snervamento data, a seconda del tipo di rodotta, da f_{pyk} (barre), $f_{p(0,1)k}$ (fili), $f_{p(1)k}$ (trefoli e trecce); si veda in proposito la Tab. 11.3.VII.

Il coefficiente γ_s assume sempre, per tutti i tipi di acciaio, il valore 1,15.

8.3.1.5. Tensione tangenziale di aderenza acciaio-calcestruzzo

La resistenza tangenziale di aderenza di calcolo f_{bd} vale:

$$f_{bd} = f_{bk} / \gamma_c \quad (4.1.7)$$

dove:

γ_c è il coefficiente parziale di sicurezza relativo al calcestruzzo, pari a 1,5;

f_{bk} è la resistenza tangenziale caratteristica di aderenza data da:

$$f_{bk} = 2,25 \cdot \eta \cdot f_{ctk} \quad (4.1.8)$$

in cui

$\eta = 1,0$ per barre di diametro $\phi \leq 32$ mm

$\eta = (132 - \phi)/100$ per barre di diametro superiore.

Nel caso di armature molto addensate o ancoraggi in zona di calcestruzzo teso, la resistenza di aderenza va ridotta dividendola almeno per 1,5.

8.3.2. Resistenza a sforzo normale e flessione (elementi monodimensionali)

4.1.2.1.2.1 Ipotesi di base

Senza escludere specifici approfondimenti, necessari in particolare nel caso di elementi costituiti da calcestruzzo di classe di resistenza superiore a C45/55, per la valutazione della resistenza ultima delle sezioni di elementi monodimensionali nei confronti di sforzo normale e flessione, si adotteranno le seguenti ipotesi:

- conservazione delle sezioni piane;
- perfetta aderenza tra acciaio e calcestruzzo;
- resistenza a trazione del calcestruzzo nulla;
- rottura del calcestruzzo determinata dal raggiungimento della sua capacità deformativa ultima a compressione;
- rottura dell'armatura tesa determinata dal raggiungimento della sua capacità deformativa ultima;
- deformazione iniziale dell'armatura di precompressione considerata nelle relazioni di congruenza della sezione.

Le tensioni nel calcestruzzo e nell'armatura si dedurranno, a partire dalle deformazioni, utilizzando i rispettivi diagrammi tensione-deformazione;

4.1.2.1.2.2 Diagrammi di calcolo tensione-deformazione del calcestruzzo

Per il diagramma tensione-deformazione del calcestruzzo è possibile adottare opportuni modelli rappresentativi del reale comportamento del materiale, modelli definiti in base alla resistenza di calcolo f_{cd} ed alla deformazione ultima ϵ_{cu} .

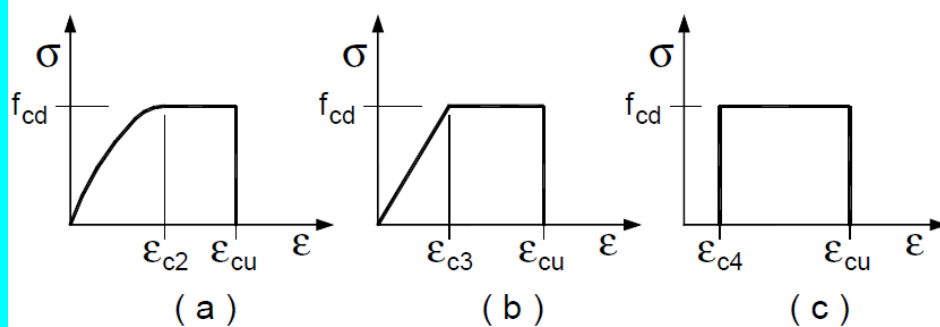


Figura 4.1.1 – Modelli σ - ε per il calcestruzzo

In Fig. 4.1.1 sono rappresentati i modelli $\sigma - \varepsilon$ per il calcestruzzo: (a) parabola-rettangolo; (b) triangolo-rettangolo; (c) rettangolo (stress block). In particolare, per le classi di resistenza pari o inferiore a C50/60 si può porre:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{c2} &= 0,20\% & \varepsilon_{cu} &= 0,35\% \\ \varepsilon_{c3} &= 0,175\% & \varepsilon_{c4} &= 0,07\%\end{aligned}$$

Per le classi di resistenza superiore a C50/60 si può porre:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{c2} &= 0,20\% + 0,0085\%(f_{ck} - 50)^{0,53} \\ \varepsilon_{cu} &= 0,26\% + 3,5\% [(90 - f_{ck}) / 100]^4 \\ \varepsilon_{c3} &= 0,175\% + 0,055\% [(f_{ck} - 50) / 40] \\ \varepsilon_{c4} &= 0,2 \cdot \varepsilon_{cu}\end{aligned}$$

purché si adottino opportune limitazioni quando si usa il modello (c).

Per sezioni o parti di sezioni soggette a distribuzioni di tensione di compressione approssimativamente uniformi, si assume per la deformazione ultima a rottura il valore ε_{c2} anziché ε_{cu} .

4.1.2.1.2.3 Diagrammi di calcolo tensione-deformazione dell'acciaio

Per il diagramma tensione-deformazione dell'acciaio è possibile adottare opportuni modelli rappresentativi del reale comportamento del materiale, modelli definiti in base al valore di calcolo $\varepsilon_{ud} = 0,9\varepsilon_{uk}$ ($\varepsilon_{uk} = (A_{gt})_k$) della deformazione uniforme ultima, al valore di calcolo della tensione di snervamento f_{yd} ed al rapporto di sovrarresistenza $k = (f_t / f_y)_k$ (Tab. 11.3.Ia-b).

In Fig. 4.1.2 sono rappresentati i modelli $\sigma - \varepsilon$ per l'acciaio: (a) bilineare finito con incrudimento; (b) elastico-perfettamente plastico indefinito.

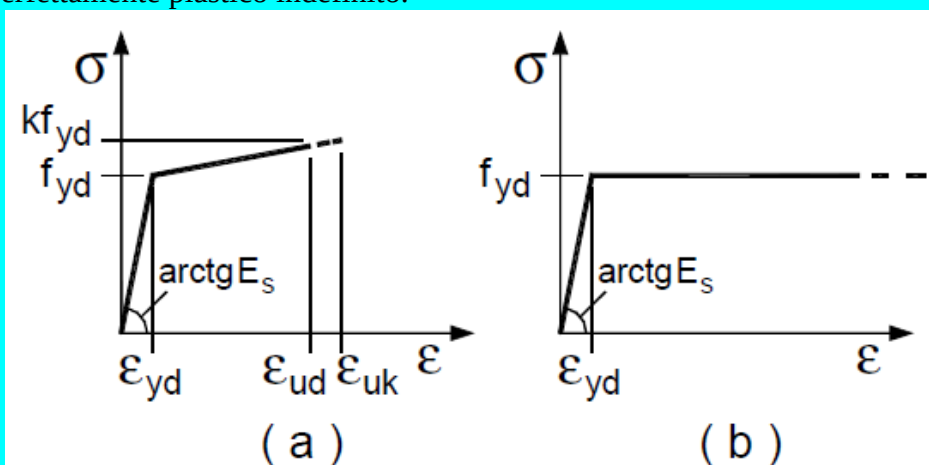


Figura 4.1.2– Modelli σ - ε per l'acciaio

4.1.2.1.2.4 Analisi della sezione

Con riferimento alla sezione pressoinflessa, rappresentata in Fig. 4.1.3

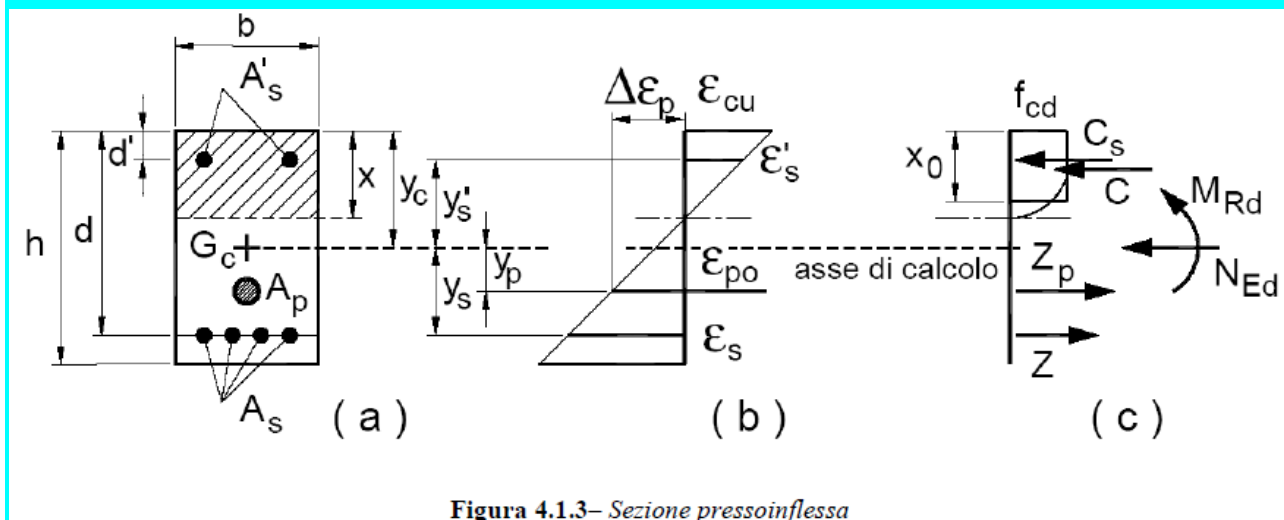


Figura 4.1.3– Sezione pressoinflessa

assieme ai diagrammi di deformazione e di sforzo così come dedotti dalle ipotesi e dai modelli $\sigma - \epsilon$ di cui nei punti precedenti, la verifica di resistenza (SLU) si esegue controllando che:

$$M_{Rd} = M_{Rd}(N_{Ed}) \geq M_{Ed} \quad (4.1.9)$$

dove

M_{Rd} è il valore di calcolo del momento resistente corrispondente a N_{Ed} ;

N_{Ed} è il valore di calcolo della componente assiale (sforzo normale) dell'azione;

M_{Ed} è il valore di calcolo della componente flettente dell'azione.

Nel caso di pilastri soggetti a compressione assiale, si deve comunque assumere una componente flettente dello sforzo $M_{Ed} = e \cdot N_{Ed}$ con eccentricità e pari almeno a $0,05h \geq 20\text{mm}$ (con h altezza della sezione).

Nel caso di pressoflessione deviata la verifica della sezione può essere posta nella forma

$$\left(\frac{M_{E_{yd}}}{M_{R_{yd}}} \right)^\alpha + \left(\frac{M_{E_{zd}}}{M_{R_{zd}}} \right)^\alpha \leq 1 \quad (4.1.10)$$

dove

$M_{E_{yd}}, M_{E_{zd}}$ sono i valori di calcolo delle due componenti di flessione retta dell'azione attorno agli assi y e z ;

$M_{R_{yd}}, M_{R_{zd}}$ sono i valori di calcolo dei momenti resistenti di pressoflessione retta corrispondenti a N_{Ed} valutati separatamente attorno agli assi y e z .

L'esponente α può dedursi in funzione della geometria della sezione e dei parametri

$$\nu = N_{Ed}/N_{Rcd} \quad (4.1.11)$$

$$\omega_t = A_t \cdot f_{yd} / N_{Rcd} \quad (4.1.12)$$

con $N_{Rcd} = A_c \cdot f_{cd}$.

In mancanza di una specifica valutazione, può porsi cautelativamente $\alpha = 1$.

8.3.3. Resistenza nei confronti di sollecitazioni taglianti

Senza escludere specifici approfondimenti, necessari in particolare nel caso di elementi costituiti da calcestruzzo di classe di resistenza superiore a C45/55, per la valutazione delle resistenze ultime di

elementi monodimensionali nei confronti di sollecitazioni taglianti, si deve considerare quanto segue.

4.1.2.1.3.1 Elementi senza armature trasversali resistenti a taglio

È consentito l'impiego di solai, piastre e membrature a comportamento analogo, sprovviste di armature trasversali resistenti a taglio. La resistenza a taglio V_{Rd} di tali elementi deve essere valutata, utilizzando formule di comprovata affidabilità, sulla base della resistenza a trazione del calcestruzzo.

La verifica di resistenza (SLU) si pone con

$$V_{Rd} \geq V_{Ed} \quad (4.1.13)$$

dove V_{Ed} è il valore di calcolo dello sforzo di taglio agente.

Con riferimento all'elemento fessurato da momento flettente, la resistenza al taglio si valuta con

$$V_{Rd} = \left\{ 0,18 \cdot k \cdot (100 \cdot \rho_1 \cdot f_{ck})^{1/3} / \gamma_c + 0,15 \cdot \sigma_{cp} \right\} \cdot b_w \cdot d \geq (v_{min} + 0,15 \cdot \sigma_{cp}) \cdot b_w d \quad (4.1.14)$$

con

$$k = 1 + (200/d)^{1/2} \leq 2$$

$$v_{min} = 0,035 k^{3/2} f_{ck}^{1/2}$$

e dove

d è l'altezza utile della sezione (in mm);

$\rho_1 = A_{sl}/(b_w \cdot d)$ è il rapporto geometrico di armatura longitudinale ($\leq 0,02$);

$\sigma_{cp} = N_{Ed}/A_c$ è la tensione media di compressione nella sezione ($\leq 0,2 f_{cd}$);

b_w è la larghezza minima della sezione (in mm).

Nel caso di elementi in cemento armato precompresso disposti in semplice appoggio, nelle zone non fessurate da momento flettente (con tensioni di trazione non superiori a f_{ctd}) la resistenza può valutarsi, in via semplificativa, con la formula:

$$V_{Rd} = 0,7 \cdot b_w \cdot d \cdot (f_{ctd}^2 + \sigma_{cp} \cdot f_{ctd})^{1/2}. \quad (4.1.15)$$

In presenza di significativi sforzi di trazione, la resistenza a taglio del calcestruzzo è da considerarsi nulla e, in tal caso, non è possibile adottare elementi sprovvisti di armatura trasversale.

Le armature longitudinali, oltre ad assorbire gli sforzi conseguenti alle sollecitazioni di flessione, devono assorbire quelli provocati dal taglio dovuti all'inclinazione delle fessure rispetto all'asse della trave, inclinazione assunta pari a 45° . In particolare, in corrispondenza degli appoggi, le armature longitudinali devono assorbire uno sforzo pari al taglio sull'appoggio.

4.1.2.1.3.2 Elementi con armature trasversali resistenti al taglio

La resistenza a taglio V_{Rd} di elementi strutturali dotati di specifica armatura a taglio deve essere valutata sulla base di una adeguata schematizzazione a traliccio. Gli elementi resistenti dell'ideale traliccio sono: le armature trasversali, le armature longitudinali, il corrente compresso di calcestruzzo e i puntoni d'anima inclinati. L'inclinazione θ dei puntoni di calcestruzzo rispetto all'asse della trave deve rispettare i limiti seguenti:

$$1 \leq \cotg \theta \leq 2,5 \quad (4.1.16)$$

La verifica di resistenza (SLU) si pone con

$$V_{Rd} \geq V_{Ed} \quad (4.1.17)$$

dove V_{Ed} è il valore di calcolo dello sforzo di taglio agente.

Con riferimento all'armatura trasversale, la resistenza di calcolo a "taglio trazione" si calcola con:

$$V_{Rsd} = 0,9 \cdot d \cdot \frac{A_{sw}}{s} \cdot f_{yd} \cdot (\cotg \alpha + \cotg \theta) \cdot \sin \alpha \quad (4.1.18)$$

Con riferimento al calcestruzzo d'anima, la resistenza di calcolo a "taglio compressione" si calcola con

$$V_{Rcd} = 0,9 \cdot d \cdot b_w \cdot \alpha_c \cdot f'_{cd} \cdot (\cotg \alpha + \cotg \theta) / (1 + \cotg^2 \theta) \quad (4.1.19)$$

La resistenza al taglio della trave è la minore delle due sopra definite:

$$V_{Rd} = \min (V_{Rsd}, V_{Rcd}) \quad (4.1.20)$$

dove d , b_w e σ_{cp} hanno il significato già visto in § 4.1.2.1.3.1. e inoltre si è posto:

A_{sw}	area dell'armatura trasversale;		
s	interasse tra due armature trasversali consecutive;		
α	angolo di inclinazione dell'armatura trasversale rispetto all'asse della trave;		
f'_{cd}	resistenza a compressione ridotta del calcestruzzo d'anima ($f'_{cd} = 0,5 \cdot f_{cd}$);		
α_c	coefficiente maggiorativo pari a	1	per membrature non compresse
		$1 + \sigma_{cp}/f_{cd}$	per $0 \leq \sigma_{cp} < 0,25 f_{cd}$
		1,25	per $0,25 f_{cd} \leq \sigma_{cp} \leq 0,5 f_{cd}$
		$2,5(1 - \sigma_{cp}/f_{cd})$	per $0,5 f_{cd} < \sigma_{cp} < f_{cd}$

In presenza di significativo sforzo assiale, ad esempio conseguente alla precompressione, si dovrà aggiungere la limitazione:

$$(\text{ctg}\theta_1 \leq \text{ctg}\theta) \quad (4.1.21)$$

dove θ_1 è l'angolo di inclinazione della prima fessurazione ricavato da $\text{ctg } \theta_1 = \tau / \sigma_1$ mentre τ e σ_1 sono

rispettivamente la tensione tangenziale e la tensione principale di trazione sulla corda baricentrica della sezione intesa interamente reagente.

Le armature longitudinali, dimensionate in base alle sollecitazioni flessionali, dovranno essere prolungate di una misura pari a

$$a_l = 0,9 \cdot d \cdot (\text{ctg}\theta - \text{ctg}\alpha) / 2 \geq 0 \quad (4.1.22)$$

9. STATI LIMITE PER LE TRAVI

Le ipotesi fatte per la determinazione dello stato limite nella sezione degli elementi monodimensionali (travi, pilastri) sono quelle di cui all'art. 4.1.2.1.2.1 del DM.2008 sopra riportate.

Ed esattamente:

- *conservazione delle sezioni piane*

le sezioni della trave rimangono piane fino a rottura, il diagramma delle deformazioni nella sezione si conserva rettilineo;

- *perfetta aderenza tra acciaio e calcestruzzo*

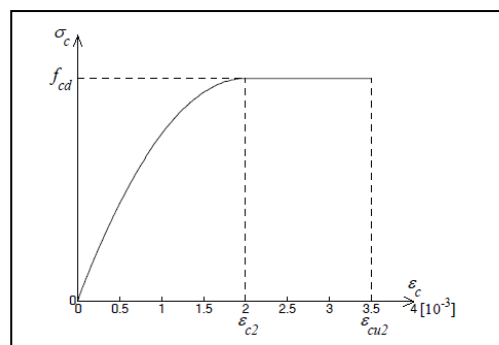
esiste perfetta aderenza tra conglomerato e acciaio per cui le armature subiscono la stessa deformazione della fibra di conglomerato adiacente;

- *resistenza a trazione del calcestruzzo nulla*

il conglomerato teso non si considera resistente;

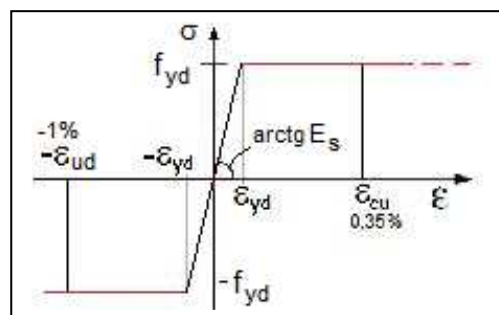
- *rottura del calcestruzzo determinata dal raggiungimento della sua capacità deformativa ultima a compressione*

ipotizzando che il modello σ - ϵ per il calcestruzzo sia quello di parabola-rettangolo, le massime deformazioni del conglomerato si assumono pari a $\epsilon_{cu}=0,35\%$ nei casi di flessione semplice e composta, retta e deviata con asse neutro reale, e variabili tra $\epsilon_{c2}=0,20\%$ ed $\epsilon_{cu}=0,35\%$ quando l'asse neutro, esterno alla sezione, tende all'infinito;



- *rottura dell'armatura tesa determinata dal raggiungimento della sua capacità deformativa ultima*

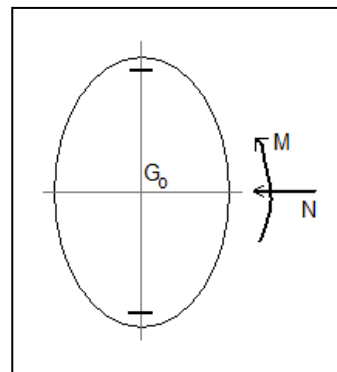
la deformazione massima (in valore assoluto), nell'armatura tesa in acciaio a durezza naturale impiegato nel c.a. ordinario si assume pari a: $\epsilon_{ud}=0,01$ (1%).



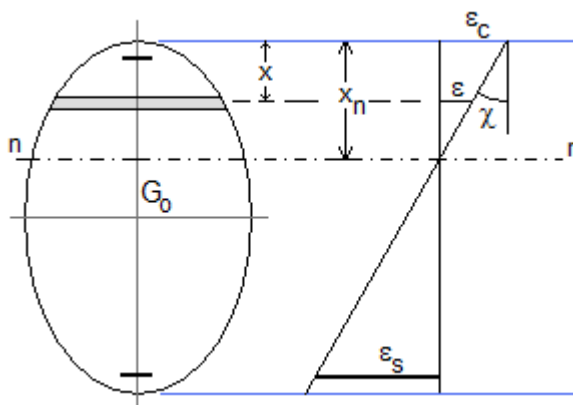
9.1. Stato Limite Ultimo per Sforzo Normale e Flessione

Tra gli stati limite ultimi per sollecitazioni che generano TENSIONI NORMALI vediamo il caso di una sezione in c.a. a doppia armatura e di forma qualsiasi, sottoposta ad uno stato di sollecitazione composta di sforzo normale e flessione.

Lo stato di deformazione della sezione, per l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, viene rappresentato, nel piano delle sollecitazioni da una retta strettamente dipendente dal valore attuale delle caratteristiche della sollecitazione composta di sforzo normale e flessione : (M,N).



Tale stato di deformazione è completamente determinato una volta noti (ϵ_c, χ) ossia la deformazione al lembo superiore e l'angolo di cui è inclinata tale retta, oppure (ϵ_c, x_n) ossia la deformazione al lembo superiore e la posizione dell'asse neutro.

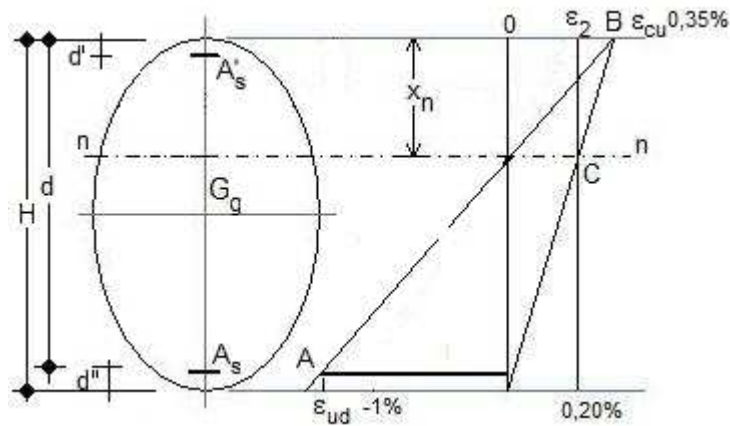


Tra tutte le deformazioni possibili nella sezione, si possono estrarre quelle, più particolari, che si presentano in concomitanza con la crisi della sezione stessa.

Detta crisi, peraltro definita in modo convenzionale, si può manifestare secondo uno dei seguenti meccanismi:

1. Cedimento delle armature tese, in assenza di contributo alla resistenza del conglomerato, in quanto sollecitato a trazione;
2. Cedimento delle armature tese con tensioni nel conglomerato compresso, minori od al più eguali, al valore $f_{cd} = \alpha_{cc} \cdot f_{ck} / \gamma_c$ cui si associa (convenzionalmente) lo schiacciamento del conglomerato compresso;
3. Contemporaneo cedimento delle armature tese e schiacciamento del conglomerato compresso;
4. Schiacciamento del conglomerato compresso, con l'acciaio teso in campo elastico;
5. Schiacciamento del conglomerato per flessione, con le armature tutte compresse;
6. Schiacciamento del conglomerato per pressione centrata.

I possibili campi di deformazione della sezione, ciascuno associato ad uno (ed uno solo) dei meccanismi di crisi sopra elencati, possono essere sinteticamente rappresentati in figura da rette che devono appartenere rispettivamente ai fasci di sostegno A, B o C, con le seguenti limitazioni:



Fascio A

tutte le rette individuate dai punti (A,X) con X di coordinate $(x_n, 0)$, purché x_n sia compreso nell'intervallo

$$-\infty \leq x_n \leq x_B$$

Ossia le rette comprese tra la verticale passante per A (la quale rappresenta uno stato di deformazione di trazione costante pari all' 1%) e la congiungente AB (la quale rappresenta uno stato di deformazione in cui la crisi si ha sia nell'acciaio che nel calcestruzzo).

Il valore di x_B può determinarsi dalla relazione:

$$\frac{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}}{d} = \frac{\varepsilon_{cu}}{x_B}$$

Da cui:

$$x_B = \frac{d \cdot \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}} = \frac{0,35}{1,35} \cdot d = 0,259 \cdot d$$

Fascio B

tutte le rette individuate dai punti (B,X) con X di coordinate $(x_n, 0)$, purché x_n sia compreso nell'intervallo

$$x_B \leq x_n \leq d$$

Fascio C

tutte le rette individuate dai punti (C,X) con X di coordinate $(x_n, 0)$, purché x_n sia compreso nell'intervallo

$$d \leq x_n \leq \infty$$

Per converso, qualunque altra deformazione possibile che non rientri tra quelle sopra definite non è associabile ad un qualsivoglia stato limite ultimo o di collasso (convenzionale) della sezione.

Per una sezione assegnata è rilevante determinare, in corrispondenza di ogni distribuzione di deformazioni associata ad un meccanismo di collasso, la coppia di grandezze:

$$(M_{RD}, N_{RD})$$

Regione 2

Le rette di deformazione appartengono ancora al fascio di sostegno A. La deformazione superiore ϵ_c può variare tra i valori 0 ed ϵ_{cu} .

Nella sezione si è in presenza di flessione semplice o composta, senza che venga raggiunta la deformazione massima di calcolo ϵ_{cu} del conglomerato.

La crisi si ha ancora per cedimento dell'armatura tesa.

Regione 3

Le rette di deformazione appartengono al fascio di sostegno B. La deformazione superiore ϵ_c è pari ad ϵ_{cu} , la deformazione nell'acciaio teso può variare tra i valori $-\epsilon_{ud}$ e $-\epsilon_{yd}$, per cui lo stesso si trova in campo plastico.

Nella sezione si è in presenza di flessione semplice o composta con la particolarità che il conglomerato e l'acciaio sono utilizzati al massimo delle loro risorse.

La crisi si ha per contemporaneo schiacciamento del conglomerato compresso e cedimento delle armature tese.

Regione 4

Le rette di deformazione appartengono ancora al fascio di sostegno B. La deformazione superiore ϵ_c è pari ad ϵ_{cu} , la deformazione nell'acciaio teso può variare tra i valori $-\epsilon_{yd}$ e 0.

La crisi si ha per schiacciamento del conglomerato compresso mentre l'acciaio è in campo elastico.

Regione 5

Le rette di deformazione appartengono ancora al fascio di sostegno B. Le armature inferiori e superiori della sezione risultano entrambe compresse.

La sollecitazione è di flessione composta e la crisi si ha per schiacciamento del conglomerato compresso.

Regione 6

Le rette di deformazione appartengono al fascio di sostegno C.

Nella sezione si è in presenza di pressione centrata e/o pressoflessione con piccola eccentricità.

La deformazione superiore ϵ_c può variare tra i valori ϵ_{c2} ed ϵ_{cu} .

La crisi si ha per schiacciamento del conglomerato.

Il dominio di sicurezza della sezione è limitato dalla curva di interazione caratterizzata dall'equazione:

$$f(N_R, M_R)=0$$

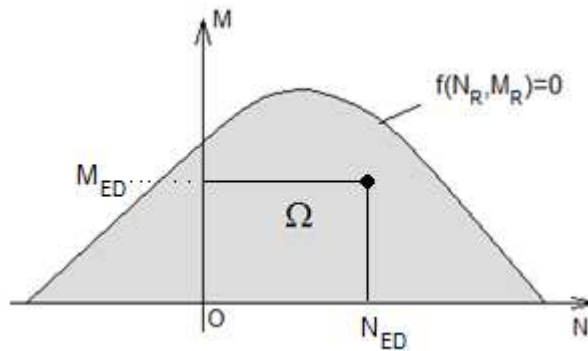
in ogni regione è possibile determinare i valori di N ed M per cui si raggiunge lo stato di crisi N_R , M_R sfruttando le relative equazioni di equilibrio e di congruenza.

A tale scopo, osserviamo che, nella letteratura sono esposti vari metodi per la costruzione dei domini di resistenza, ed in genere si trovano vari grafici con ivi rappresentati i domini al variare della percentuale meccanica di armatura $q=A_s f_{yd}/b h f_{cd}$.

Poiché la frontiera del dominio di resistenza M-N è costituita dal luogo dei punti del piano N-M corrispondenti alle coppie di coordinate M (momento flettente) ed N (sforzo normale) che determinano la crisi della sezione.

La verifica può essere condotta nel seguente modo:

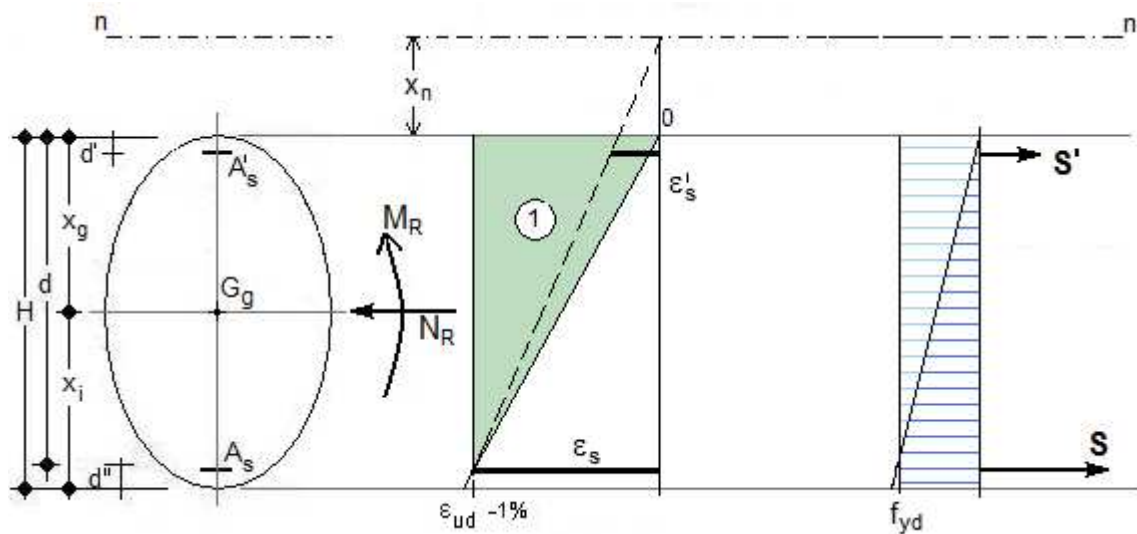
- Si costruisce il dominio di resistenza M-N della sezione utilizzando le *equazioni di congruenza*, di *equilibrio alla traslazione* e di *equilibrio alla rotazione*;
- Si considera la coppia M_{ED} ed N_{ED} (momento flettente e sforzo normale) che sollecita la sezione;
- Si riporta sul diagramma il punto di coordinate (N_{ED}, M_{ED})
- Si presentano due possibilità:
 - (N_{ED}, M_{ED}) punto INTERNO al dominio $\Rightarrow$ **SEZIONE VERIFICATA**
 - (N_{ED}, M_{ED}) punto ESTERNO al dominio $\Rightarrow$ **SEZIONE NON VERIFICATA**



Negli appunti in oggetto, si vuole riportare un metodo che, sfruttando la tecnologia informatica (Personal computer e software), consenta di costruire velocemente il dominio di resistenza per ogni singola sezione e nel contempo consenta di verificare la stessa. A tale scopo, in una prima fase, si utilizzano le *equazioni di congruenza*, di *equilibrio alla traslazione* e di *equilibrio alla rotazione*, per ogni singola regione al fine di costruire il dominio di resistenza.

9.1.1. Costruzione Dominio Resistenza

Regione 1 $-\infty \leq x_n \leq 0$



Equazioni di equilibrio:	$\begin{cases} N_R = \sigma'_s A'_s + \sigma_s A_s \\ M_R = \sigma'_s A'_s \cdot (x_g - d') - \sigma_s A_s \cdot (x_i - d'') \end{cases}$
Legame costitutivo Acciaio	$\epsilon_s = \epsilon_{ud} \Rightarrow \sigma_s = -f_{yd}$ $\epsilon'_s = \frac{d' - x_n}{d - x_n} \epsilon_{ud} \Rightarrow \sigma'_s = \begin{cases} -E_s \epsilon'_s & \text{per } \epsilon'_s \leq \epsilon_{yd} \\ -f_{yd} & \text{per } \epsilon'_s > \epsilon_{yd} \end{cases}$ (nb. x_n è negativo)

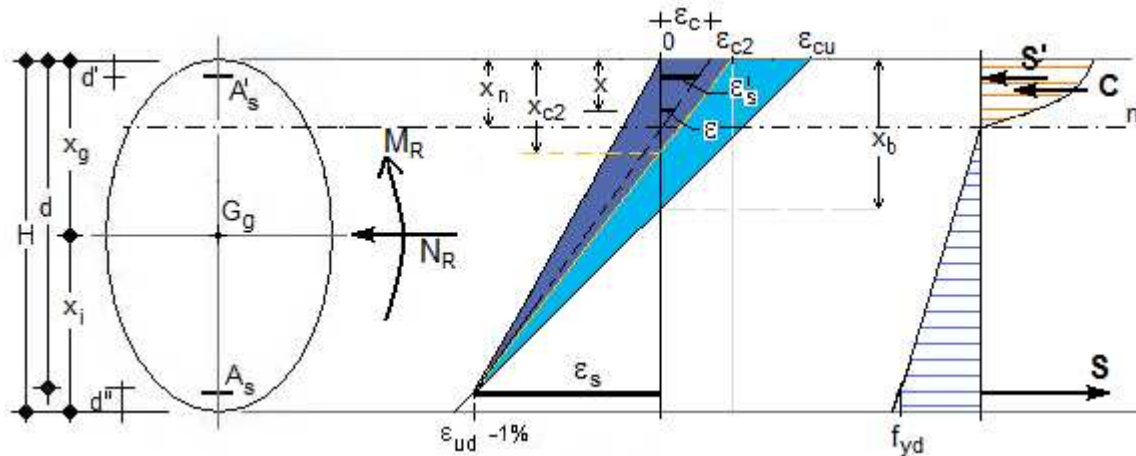
Osservazione:

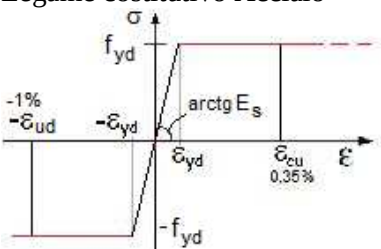
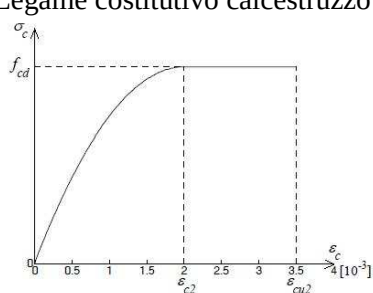
Posto $x_{n,i} = \frac{d' \epsilon_{ud} - d \epsilon_{yd}}{\epsilon_{ud} - \epsilon_{yd}}$ in corrispondenza del quale risulta $\epsilon'_s = \epsilon_{yd}$ e quindi $\sigma'_s = \sigma_s$ al variare di x_n da

$-\infty$ a $-x_{n,i}$ si ha sempre lo stesso valore di N_R ed M_R , pertanto si può affermare che nella

regione 1 : $-x_{n,i} \leq x_n \leq 0$

Regione 2(a) $0 \leq x_n \leq x_{c2}$



Equazioni di equilibrio:	$\begin{cases} N_R = \int_0^{x_n} \sigma(x)b(x)dx + \sigma'_s A'_s + \sigma_s A_s \\ M_R = \int_0^{x_n} \sigma(x)b(x)(x_g - x)dx + \sigma'_s A'_s \cdot (x_g - d') - \sigma_s A_s \cdot (x_i - d'') \end{cases}$
Limite Regione 2(a)-2(b):	$x_{c2} = \frac{d \cdot \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{ud}} = \frac{0,20}{1,20} \cdot d = 0,166667 \cdot d$
Legame costitutivo Acciaio 	$\varepsilon_s = \varepsilon_{ud} \Rightarrow \sigma_s = -f_{yd}$ $\varepsilon'_s = \frac{x_n - d'}{d - x_n} \varepsilon_{ud} \Rightarrow \sigma'_s = \begin{cases} -E_s \varepsilon'_s & \text{per } \varepsilon'_s \leq \varepsilon_{yd} \\ -f_{yd} & \text{per } \varepsilon'_s > \varepsilon_{yd} \end{cases}$
Legame costitutivo calcestruzzo 	$\varepsilon = (x_n - x) \frac{\varepsilon_c}{x_n} = \frac{(x_n - x)}{(d - x_n)} \varepsilon_{ud} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} = 5 \frac{(x_n - x)}{(d - x_n)}$ Poiché in tale regione $x_n \leq x_{c2}$; $\forall x \leq x_n \rightarrow \varepsilon(x) \leq \varepsilon_{c2}$, si ha $\sigma(x) = f_{cd} \cdot \left[2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right]$
Dalle equazioni sopra scritte, osserviamo che risulta: $\sigma(x) = 5 \cdot f_{cd} \cdot \left[2 \frac{(x_n - x)}{(d - x_n)} - 5 \frac{(x_n - x)^2}{(d - x_n)^2} \right] = \frac{5 f_{cd}}{(d - x_n)^2} \cdot (2(d - x_n)(x_n - x) - 5(x_n - x)^2) =$	

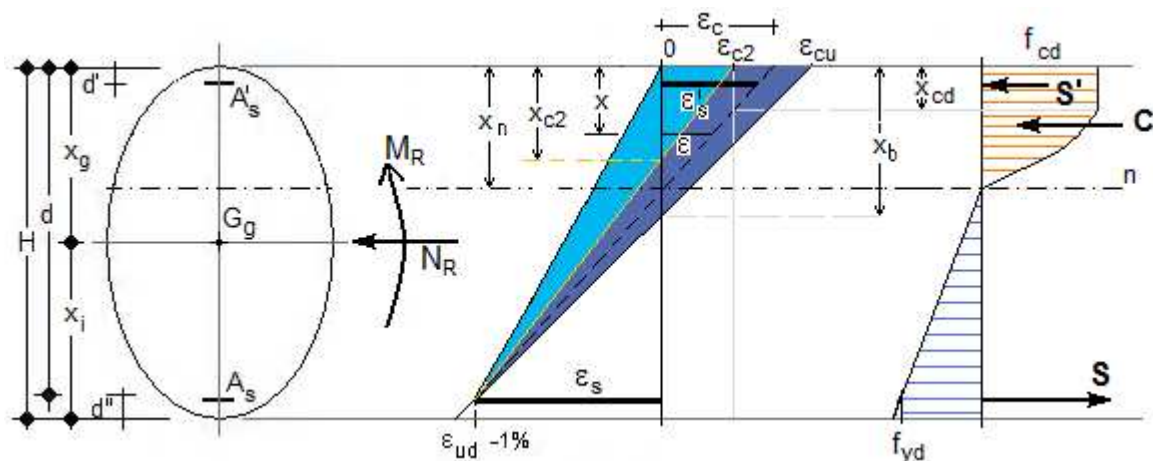
$$\begin{aligned}
&= \frac{5f_{cd}}{(d-x_n)^2} \cdot (2dx_n - 2dx - 2x_n^2 + 2x_n x - 5(x_n^2 + x^2 - 2x_n x)) = \\
&= \frac{5f_{cd}}{(d-x_n)^2} \cdot (2dx_n - 2dx - 7x_n^2 + 12x_n x - 5x^2)
\end{aligned}$$

e quindi :

$$\begin{aligned}
\int_0^{x_n} \sigma(x) dx &= \frac{5f_{cd}}{(d-x_n)^2} \cdot \left[2dx_n x - \frac{2dx^2}{2} - 7x_n^2 x + \frac{12x_n x^2}{2} - \frac{5x^3}{3} \right]_0^{x_n} = \\
&= \frac{5f_{cd}}{(d-x_n)^2} \cdot \left[2dx_n^2 - dx_n^2 - 7x_n^3 + 6x_n^3 - \frac{5x_n^3}{3} \right] = \frac{5f_{cd}}{(d-x_n)^2} \cdot \left[dx_n^2 - \frac{8}{3}x_n^3 \right] = \\
&= \frac{5f_{cd}}{3(d-x_n)^2} \cdot [3dx_n^2 - 8x_n^3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{x_n} \sigma(x) \cdot (x_g - x) dx &= \int_0^{x_n} \sigma(x) \cdot x_g dx - \int_0^{x_n} \sigma(x) \cdot x dx = \\
&= \frac{5f_{cd}}{(d-x_n)^2} \cdot \left\{ \int_0^{x_n} (2dx_n - 2dx - 7x_n^2 + 12x_n x - 5x^2) \cdot x_g dx - \int_0^{x_n} (2dx_n x - 2dx^2 - 7x_n^2 x + 12x_n x^2 - 5x^3) dx \right\} = \\
&= \frac{5f_{cd}}{(d-x_n)^2} \cdot \left\{ \left[2dx_n x - \frac{2dx^2}{2} - 7x_n^2 x + \frac{12x_n x^2}{2} - \frac{5x^3}{3} \right]_0^{x_n} x_g - \left[2dx_n \frac{x^2}{2} - \frac{2dx^3}{3} - \frac{7x_n^2 x^2}{2} + \frac{12x_n x^3}{3} - \frac{5x^4}{4} \right]_0^{x_n} \right\} = \\
&= \frac{5f_{cd}}{(d-x_n)^2} \cdot \left[\left(2dx_n^2 - dx_n^2 - 7x_n^3 + 6x_n^3 - \frac{5x_n^3}{3} \right) x_g - dx_n^3 + \frac{2dx_n^3}{3} + \frac{7x_n^4}{2} - \frac{12x_n^4}{3} + \frac{5x_n^4}{4} \right] = \\
&= \frac{5f_{cd}}{(d-x_n)^2} \cdot \left[\left(dx_n^2 - \frac{8}{3}x_n^3 \right) x_g - \frac{1}{3}dx_n^3 + \frac{9}{12}x_n^4 \right] = \\
&= \frac{5f_{cd}}{12(d-x_n)^2} \cdot (12dx_g x_n^2 - 32x_g x_n^3 - 4dx_n^3 + 9x_n^4)
\end{aligned}$$

Regione 2(b) $x_{c2} \leq x_n \leq x_b$



Equazioni di equilibrio:	$\begin{cases} N_R = \int_0^{x_n} \sigma(x)b(x)dx + \sigma'_s A'_s + \sigma_s A_s \\ M_R = \int_0^{x_n} \sigma(x)b(x)(x_g - x)dx + \sigma'_s A'_s \cdot (x_g - d') - \sigma_s A_s \cdot (x_i - d'') \end{cases}$
Limite Regione 2(a)-2(b):	$x_{c2} = \frac{d \cdot \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{ud}} = \frac{0,20}{1,20} \cdot d = 0,166667 \cdot d$
Limite Regione 2(b)-3:	$x_B = \frac{d \cdot \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}} = \frac{0,35}{1,35} \cdot d = 0,259259 \cdot d$
Legame costitutivo Acciaio	$\varepsilon_s = \varepsilon_{ud} \Rightarrow \sigma_s = -f_{yd}$ $\varepsilon'_s = \frac{x_n - d'}{d - x_n} \varepsilon_{ud} \Rightarrow \sigma'_s = \begin{cases} -E_s \varepsilon'_s & \text{per } \varepsilon'_s \leq \varepsilon_{yd} \\ -f_{yd} & \text{per } \varepsilon'_s > \varepsilon_{yd} \end{cases}$
Legame costitutivo calcestruzzo	$\varepsilon = (x_n - x) \frac{\varepsilon_c}{x_n} = \frac{(x_n - x)}{(d - x_n)} \varepsilon_{ud} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} = 5 \frac{(x_n - x)}{(d - x_n)}$ $\sigma(x) = \begin{cases} f_{cd} \cdot \left[2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right] & \text{per } \varepsilon \leq \varepsilon_{c2} \\ f_{cd} & \text{per } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cu} \end{cases}$
Osserviamo inoltre che, in tale regione, al variare di x tra 0 e $x_{cd} = x_n - (d - x_n) \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{ud}} = x_n - 0,20 \cdot (d - x_n)$ risulta $\varepsilon_{c2} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cu}$ e quindi $\sigma(x) = f_{cd}$. ossia:	

$$\sigma(x) = \begin{cases} 5f_{cd} \left[2 \frac{(x_n - x)}{(d - x_n)} - 5 \frac{(x_n - x)^2}{(d - x_n)^2} \right] = \frac{5f_{cd}}{(d - x_n)^2} (2dx_n - 2dx - 7x_n^2 + 12x_n x - 5x^2) & \text{per } x > x_{cd} \\ f_{cd} & \text{per } x \leq x_{cd} \end{cases}$$

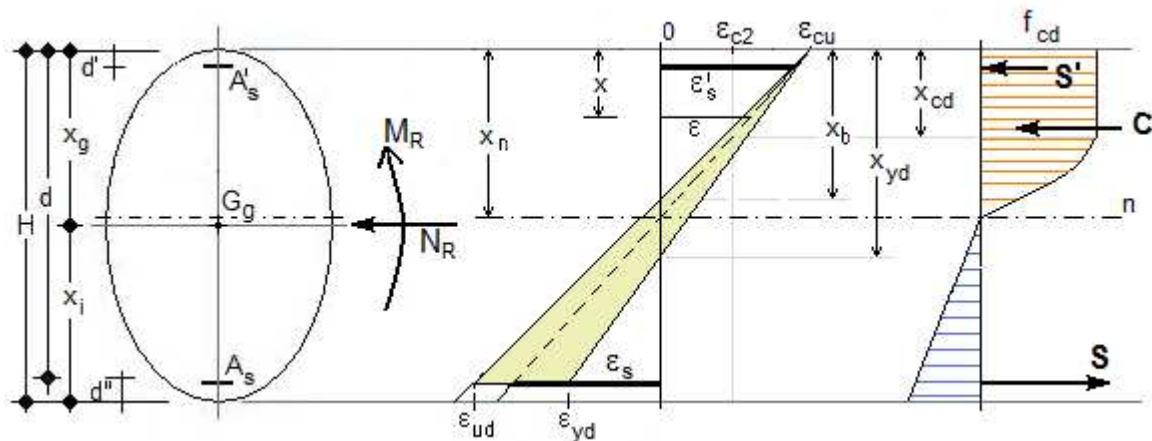
Inoltre, risulta:

$$\begin{aligned} \int_0^{x_n} \sigma(x) dx &= \int_0^{x_{cd}} \sigma(x) dx + \int_{x_{cd}}^{x_n} \sigma(x) dx = \\ &= f_{cd} x_{cd} + \frac{5f_{cd}}{(d - x_n)^2} \cdot \left[2dx_n x - \frac{2dx^2}{2} - 7x_n^2 x + \frac{12x_n x^2}{2} - 5 \frac{x^3}{3} \right]_{x_{cd}}^{x_n} = \\ &= f_{cd} x_{cd} + \frac{5f_{cd}}{(d - x_n)^2} \cdot \left(2dx_n^2 - dx_n^2 - 7x_n^3 + 6x_n^3 - 5 \frac{x_n^3}{3} - 2dx_n x_{cd} + dx_{cd}^2 + 7x_n^2 x_{cd} - 6x_n x_{cd}^2 + 5 \frac{x_{cd}^3}{3} \right) = \\ &= f_{cd} x_{cd} + \frac{5f_{cd}}{(d - x_n)^2} \cdot \left(dx_n^2 - \frac{8}{3} x_n^3 - 2dx_n x_{cd} + dx_{cd}^2 + 7x_n^2 x_{cd} - 6x_n x_{cd}^2 + 5 \frac{x_{cd}^3}{3} \right) = \\ &= f_{cd} x_{cd} + \frac{5f_{cd}}{3(d - x_n)^2} \cdot (3dx_n^2 - 8x_n^3 - 6dx_n x_{cd} + 3dx_{cd}^2 + 21x_n^2 x_{cd} - 18x_n x_{cd}^2 + 5x_{cd}^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{x_n} \sigma(x)(x_g - x) dx &= \int_0^{x_{cd}} \sigma(x)(x_g - x) dx + \int_{x_{cd}}^{x_n} \sigma(x)(x_g - x) dx = \\ &= \int_0^{x_{cd}} \sigma(x) x_g dx - \int_0^{x_{cd}} \sigma(x) x dx + \int_{x_{cd}}^{x_n} \sigma(x) x_g dx - \int_{x_{cd}}^{x_n} \sigma(x) x dx = \\ &= f_{cd} x_g x_{cd} - f_{cd} \frac{x_{cd}^2}{2} + \frac{5f_{cd}}{(d - x_n)^2} \cdot \int_{x_{cd}}^{x_n} (2dx_n - 2dx - 7x_n^2 + 12x_n x - 5x^2) \cdot x_g dx + \\ &\quad - \frac{5f_{cd}}{(d - x_n)^2} \cdot \int_{x_{cd}}^{x_n} (2dx_n x - 2dx^2 - 7x_n^2 x + 12x_n x^2 - 5x^3) dx = \\ &= f_{cd} x_g x_{cd} - f_{cd} \frac{x_{cd}^2}{2} + \frac{5f_{cd}}{(d - x_n)^2} \cdot \left[2dx_n x - \frac{2dx^2}{2} - 7x_n^2 x + \frac{12x_n x^2}{2} - 5 \frac{x^3}{3} \right]_{x_{cd}}^{x_n} x_g + \\ &\quad - \frac{5f_{cd}}{(d - x_n)^2} \cdot \left[2dx_n \frac{x^2}{2} - \frac{2dx^3}{3} - \frac{7x_n^2 x^2}{2} + \frac{12x_n x^3}{3} - 5 \frac{x^4}{4} \right]_{x_{cd}}^{x_n} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_{cd} x_g x_{cd} - f_{cd} \frac{x_{cd}^2}{2} + \frac{5f_{cd}}{(d-x_n)^2} \cdot \left(2dx_n^2 - dx_n^2 - 7x_n^3 + 6x_n^3 - 5\frac{x_n^3}{3} \right) x_g + \\
&\quad - \frac{5f_{cd}}{(d-x_n)^2} \cdot \left(2dx_n x_{cd} - dx_{cd}^2 - 7x_n^2 x_{cd} + 6x_n x_{cd}^2 - 5\frac{x_{cd}^3}{3} \right) x_g + \\
&\quad - \frac{5f_{cd}}{(d-x_n)^2} \cdot \left[\left(dx_n^3 - \frac{2dx_n^3}{3} - \frac{7x_n^4}{2} + \frac{12x_n^4}{3} - 5\frac{x_n^4}{4} \right) - \left(dx_n x_{cd}^2 - \frac{2dx_{cd}^3}{3} - \frac{7x_n^2 x_{cd}^2}{2} + \frac{12x_n x_{cd}^3}{3} - 5\frac{x_{cd}^4}{4} \right) \right] = \\
&= f_{cd} x_g x_{cd} - f_{cd} \frac{x_{cd}^2}{2} + \frac{5f_{cd}}{(d-x_n)^2} \cdot \left[dx_n^2 - \frac{8}{3}x_n^3 - 2dx_n x_{cd} + dx_{cd}^2 + 7x_n^2 x_{cd} - 6x_n x_{cd}^2 + 5\frac{x_{cd}^3}{3} \right] x_g + \\
&\quad - \frac{5f_{cd}}{(d-x_n)^2} \cdot \left[\frac{dx_n^3}{3} - \frac{9}{12}x_n^4 - dx_n x_{cd}^2 + \frac{2dx_{cd}^3}{3} + \frac{7x_n^2 x_{cd}^2}{2} - \frac{12x_n x_{cd}^3}{3} + 5\frac{x_{cd}^4}{4} \right] = \\
&= f_{cd} x_g x_{cd} - f_{cd} \frac{x_{cd}^2}{2} + \frac{5f_{cd}}{(d-x_n)^2} \cdot \left[dx_n^2 - \frac{8}{3}x_n^3 - 2dx_n x_{cd} + dx_{cd}^2 + 7x_n^2 x_{cd} - 6x_n x_{cd}^2 + 5\frac{x_{cd}^3}{3} \right] x_g + \\
&\quad - \frac{5f_{cd}}{12(d-x_n)^2} \cdot \left[4dx_n^3 - 9x_n^4 - 12dx_n x_{cd}^2 + 8dx_{cd}^3 + 42x_n^2 x_{cd}^2 - 48x_n x_{cd}^3 + 15x_{cd}^4 \right]
\end{aligned}$$

Regione 3 $x_b \leq x_n \leq x_{yd}$



Equazioni di equilibrio:	$\begin{cases} N_R = \int_0^{x_n} \sigma(x)b(x)dx + \sigma'_s A'_s + \sigma_s A_s \\ M_R = \int_0^{x_n} \sigma(x)b(x)(x_g - x)dx + \sigma'_s A'_s \cdot (x_g - d') - \sigma_s A_s \cdot (x_i - d'') \end{cases}$
Limite Regione 2(b)-3:	$x_B = \frac{d \cdot \epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{ud}} = \frac{0,35}{1,35} \cdot d = 0,259259 \cdot d$
Limite Regione 3-4:	$x_{yd} = \frac{d \cdot \epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{yd}} \quad (\text{dipendente dal tipo di acciaio})$
Legame costitutivo Acciaio 	$\epsilon_s \geq \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = -f_{yd}$ $\epsilon'_s = \frac{x_n - d'}{x_n} \epsilon_{cu} \Rightarrow \sigma'_s = \begin{cases} E_s \epsilon'_s & \text{per } \epsilon'_s \leq \epsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{per } \epsilon'_s > \epsilon_{yd} \end{cases}$
Legame costitutivo calcestruzzo 	$\epsilon = (x_n - x) \frac{\epsilon_{cu}}{x_n} \Rightarrow \frac{\epsilon}{\epsilon_{c2}} = 1,75 \frac{(x_n - x)}{x_n}$ $\sigma(x) = \begin{cases} f_{cd} \cdot \left[2 \frac{\epsilon}{\epsilon_{c2}} - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{c2}} \right)^2 \right] & \text{per } \epsilon \leq \epsilon_{c2} \\ f_{cd} & \text{per } \epsilon_{c2} \leq \epsilon \leq \epsilon_{cu} \end{cases}$
Analogamente a quanto detto per la regione 2(b), nella regione 3, al variare di x tra 0 e $x_{cd} = \frac{\epsilon_{cu} - \epsilon_{c2}}{\epsilon_{cu}} x_n$ risulta $\epsilon_{c2} \leq \epsilon \leq \epsilon_{cu}$ e quindi $\sigma(x) = f_{cd}$.	

ossia:

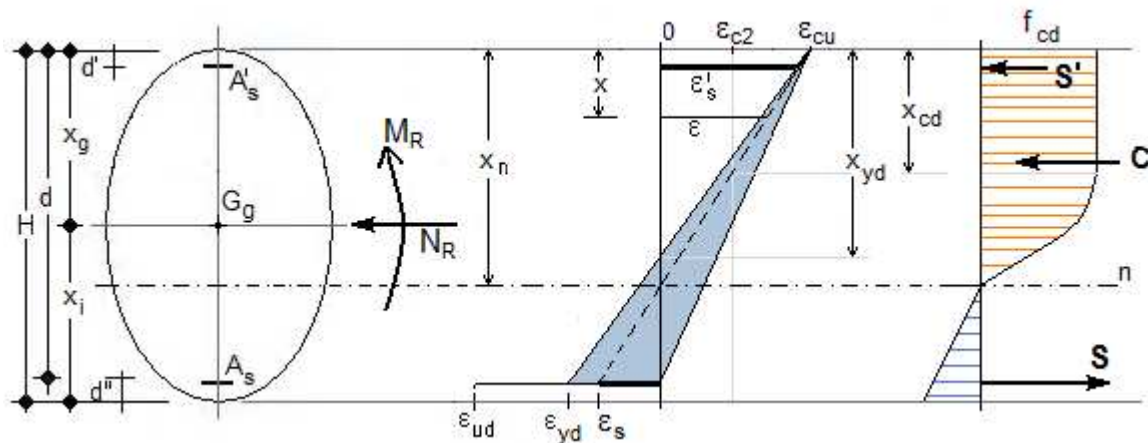
$$\sigma(x) = \begin{cases} 1,75 \cdot f_{cd} \cdot \left[2 \cdot \frac{(x_n - x)}{x_n} - \frac{(x_n - x)^2}{x_n^2} \right] = \frac{1,75 f_{cd}}{x_n^2} \cdot (x_n^2 - x^2) & \text{per } x > x_{cd} \\ f_{cd} & \text{per } x \leq x_{cd} \end{cases}$$

Inoltre, risulta:

$$\begin{aligned} \int_0^{x_n} \sigma(x) dx &= \int_0^{x_{cd}} \sigma(x) dx + \int_{x_{cd}}^{x_n} \sigma(x) dx = f_{cd} x_{cd} + \frac{1,75 f_{cd}}{x_n^2} \cdot \left[x_n^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{x_{cd}}^{x_n} = \\ &= f_{cd} x_{cd} + \frac{1,75 f_{cd}}{x_n^2} \cdot \left(x_n^3 - \frac{x_n^3}{3} - x_n^2 x_{cd} + \frac{x_{cd}^3}{3} \right) = f_{cd} x_{cd} + \frac{1,75 f_{cd}}{3 x_n^2} \cdot (2 x_n^3 - 3 x_n^2 x_{cd} + x_{cd}^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{x_n} \sigma(x)(x_g - x) dx &= \int_0^{x_{cd}} \sigma(x)(x_g - x) dx + \int_{x_{cd}}^{x_n} \sigma(x)(x_g - x) dx = \\ &= \int_0^{x_{cd}} \sigma(x) x_g dx - \int_0^{x_{cd}} \sigma(x) x dx + \int_{x_{cd}}^{x_n} \sigma(x) x_g dx - \int_{x_{cd}}^{x_n} \sigma(x) x dx = \\ &= f_{cd} x_g x_{cd} - f_{cd} \frac{x_{cd}^2}{2} + \frac{1,75 f_{cd}}{x_n^2} \cdot \int_{x_{cd}}^{x_n} (x_n^2 - x^2) \cdot x_g dx - \frac{1,75 f_{cd}}{x_n^2} \cdot \int_{x_{cd}}^{x_n} (x_n^2 - x^2) \cdot x dx = \\ &= f_{cd} x_g x_{cd} - f_{cd} \frac{x_{cd}^2}{2} + \frac{1,75 f_{cd}}{x_n^2} \cdot \left[x_n^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{x_{cd}}^{x_n} x_g - \frac{1,75 f_{cd}}{x_n^2} \cdot \left[x_n^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{x_{cd}}^{x_n} = \\ &= f_{cd} x_g x_{cd} - f_{cd} \frac{x_{cd}^2}{2} + \frac{1,75 f_{cd}}{x_n^2} \cdot \left(x_n^3 - \frac{x_n^3}{3} - x_n^2 x_{cd} + \frac{x_{cd}^3}{3} \right) x_g - \frac{1,75 f_{cd}}{x_n^2} \cdot \left(\frac{x_n^4}{2} - \frac{x_n^4}{4} - \frac{x_n^2 x_{cd}^2}{2} + \frac{x_{cd}^4}{4} \right) = \\ &= f_{cd} x_g x_{cd} - f_{cd} \frac{x_{cd}^2}{2} + \frac{1,75 f_{cd}}{x_n^2} \cdot \left(\frac{2}{3} x_n^3 - x_n^2 x_{cd} + \frac{x_{cd}^3}{3} \right) x_g - \frac{1,75 f_{cd}}{x_n^2} \cdot \left(\frac{x_n^4}{4} - \frac{x_n^2 x_{cd}^2}{2} + \frac{x_{cd}^4}{4} \right) = \\ &= f_{cd} x_g x_{cd} - f_{cd} \frac{x_{cd}^2}{2} + \frac{1,75 f_{cd}}{3 x_n^2} \cdot (2 x_n^3 - 3 x_n^2 x_{cd} + x_{cd}^3) x_g - \frac{1,75 f_{cd}}{4 x_n^2} \cdot (x_n^4 - 2 x_n^2 x_{cd}^2 + x_{cd}^4) \end{aligned}$$

Regione 4 $x_{yd} \leq x_n \leq d$



Equazioni di equilibrio:	$\begin{cases} N_R = \int_0^{x_n} \sigma(x)b(x)dx + \sigma'_s A'_s + \sigma_s A_s \\ M_R = \int_0^{x_n} \sigma(x)b(x)(x_g - x)dx + \sigma'_s A'_s \cdot (x_g - d') - \sigma_s A_s \cdot (x_i - d'') \end{cases}$
Limite Regione 3-4:	$x_{yd} = \frac{d \cdot \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}}$ (dipendente dal tipo di acciaio)
Limite Regione 4-5:	$x_d = d$
Legame costitutivo Acciaio 	$\varepsilon_s = \frac{d - x_n}{x_n} \varepsilon_{cu} \leq \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = -E_s \varepsilon_s$ $\varepsilon'_s = \frac{x_n - d'}{x_n} \varepsilon_{cu} \Rightarrow \sigma'_s = \begin{cases} E_s \varepsilon'_s & \text{per } \varepsilon'_s \leq \varepsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{per } \varepsilon'_s > \varepsilon_{yd} \end{cases}$
Legame costitutivo calcestruzzo 	$\varepsilon = (x_n - x) \frac{\varepsilon_{cu}}{x_n} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} = 1,75 \frac{(x_n - x)}{x_n}$ $\sigma(x) = \begin{cases} f_{cd} \cdot \left[2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right] & \text{per } \varepsilon \leq \varepsilon_{c2} \\ f_{cd} & \text{per } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cu} \end{cases}$

Analogamente a quanto detto per la regione 2(b), nella regione 4, al variare di x tra 0 e $x_{cd} = \frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} x_n$

risulta $\varepsilon_{c2} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cu}$ e quindi $\sigma(x) = f_{cd}$.

ossia:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1,75 \cdot f_{cd} \cdot \left[2 \cdot \frac{(x_n - x)}{x_n} - \frac{(x_n - x)^2}{x_n^2} \right] = \frac{1,75 f_{cd}}{x_n^2} \cdot (x_n^2 - x^2) & \text{per } x > x_{cd} \\ f_{cd} & \text{per } x \leq x_{cd} \end{cases}$$

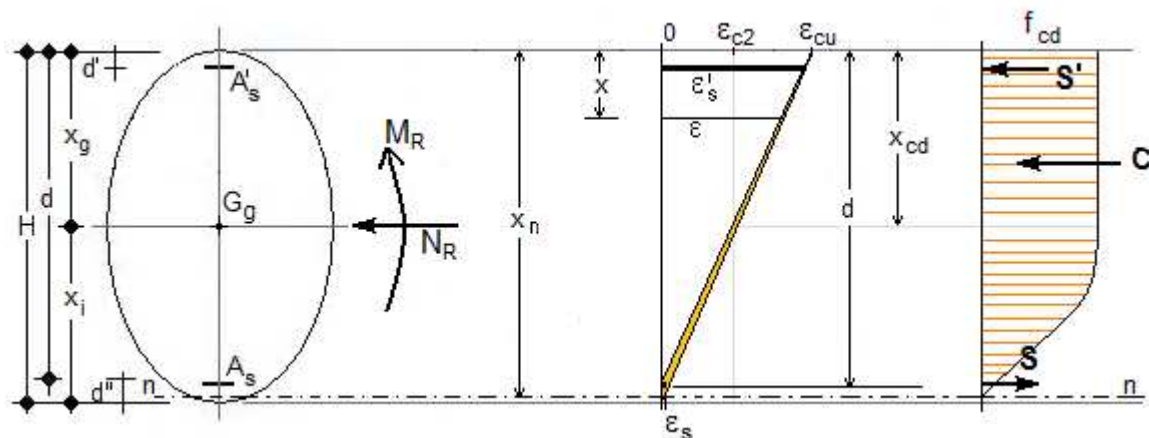
Inoltre, risulta:

$$\int_0^{x_n} \sigma(x) dx = \int_0^{x_{cd}} \sigma(x) dx + \int_{x_{cd}}^{x_n} \sigma(x) dx = f_{cd} x_{cd} + \frac{1,75 f_{cd}}{3 x_n^2} \cdot (2 x_n^3 - 3 x_n^2 x_{cd} + x_{cd}^3)$$

$$\int_0^{x_n} \sigma(x)(x_g - x) dx = \int_0^{x_{cd}} \sigma(x)(x_g - x) dx + \int_{x_{cd}}^{x_n} \sigma(x)(x_g - x) dx =$$

$$= f_{cd} x_g x_{cd} - f_{cd} \frac{x_{cd}^2}{2} + \frac{1,75 f_{cd}}{3 x_n^2} \cdot (2 x_n^3 - 3 x_n^2 x_{cd} + x_{cd}^3) x_g - \frac{1,75 f_{cd}}{4 x_n^2} \cdot (x_n^4 - 2 x_n^2 x_{cd}^2 + x_{cd}^4)$$

Regione 5 $x_d \leq x_n \leq H$



Equazioni di equilibrio:	$\begin{cases} N_R = \int_0^{x_n} \sigma(x)b(x)dx + \sigma'_s A'_s + \sigma_s A_s \\ M_R = \int_0^{x_n} \sigma(x)b(x)(x_g - x)dx + \sigma'_s A'_s \cdot (x_g - d') - \sigma_s A_s \cdot (x_i - d'') \end{cases}$
Limite Regione 4-5:	$x_d = d$
Limite Regione 5-6:	$x_d = H$
Legame costitutivo Acciaio	$\epsilon_s = \frac{x_n - d}{x_n} \epsilon_{cu} \Rightarrow \sigma_s = \begin{cases} E_s \epsilon_s & \text{per } \epsilon_s \leq \epsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{per } \epsilon_s > \epsilon_{yd} \end{cases}$ $\epsilon'_s = \frac{x_n - d'}{x_n} \epsilon_{cu} \Rightarrow \sigma'_s = \begin{cases} E_s \epsilon'_s & \text{per } \epsilon'_s \leq \epsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{per } \epsilon'_s > \epsilon_{yd} \end{cases}$
Legame costitutivo calcestruzzo	$\epsilon = (x_n - x) \frac{\epsilon_{cu}}{x_n} \Rightarrow \frac{\epsilon}{\epsilon_{c2}} = 1,75 \frac{(x_n - x)}{x_n}$ $\sigma(x) = \begin{cases} f_{cd} \cdot \left[2 \frac{\epsilon}{\epsilon_{c2}} - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{c2}} \right)^2 \right] & \text{per } \epsilon \leq \epsilon_{c2} \\ f_{cd} & \text{per } \epsilon_{c2} \leq \epsilon \leq \epsilon_{cu} \end{cases}$
Analogamente a quanto detto per la regione 2(b), nella regione 5, al variare di x tra 0 e $x_{cd} = \frac{\epsilon_{cu} - \epsilon_{c2}}{\epsilon_{cu}} x_n$ risulta $\epsilon_{c2} \leq \epsilon \leq \epsilon_{cu}$ e quindi $\sigma(x) = f_{cd}$. ossia:	

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1,75 \cdot f_{cd} \cdot \left[2 \cdot \frac{(x_n - x)}{x_n} - \frac{(x_n - x)^2}{x_n^2} \right] = \frac{1,75 f_{cd}}{x_n^2} \cdot (x_n^2 - x^2) & \text{per } x > x_{cd} \\ f_{cd} & \text{per } x \leq x_{cd} \end{cases}$$

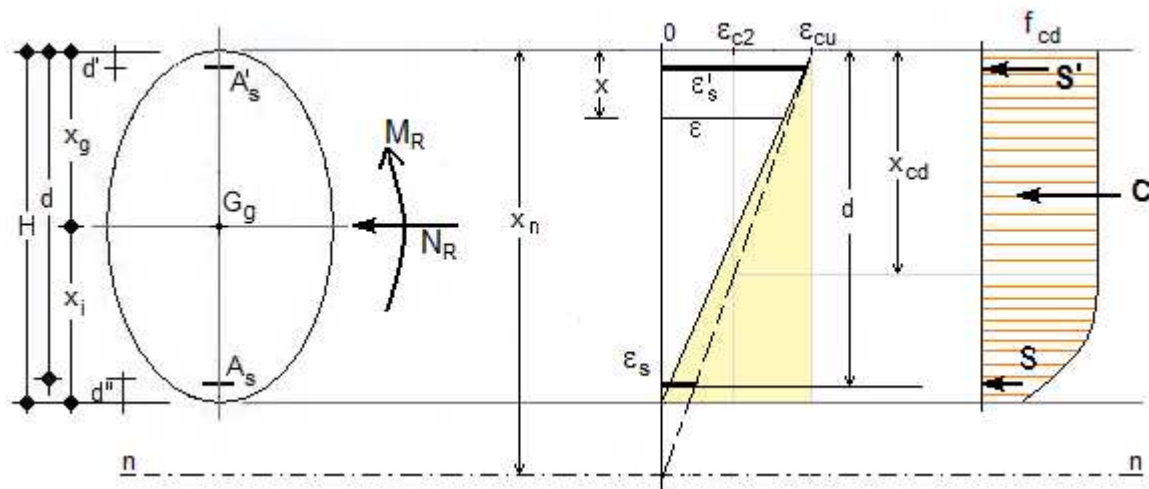
Inoltre, risulta:

$$\int_0^{x_n} \sigma(x) dx = \int_0^{x_{cd}} \sigma(x) dx + \int_{x_{cd}}^{x_n} \sigma(x) dx = f_{cd} x_{cd} + \frac{1,75 f_{cd}}{3 x_n^2} \cdot (2 x_n^3 - 3 x_n^2 x_{cd} + x_{cd}^3)$$

$$\int_0^{x_n} \sigma(x)(x_g - x) dx = \int_0^{x_{cd}} \sigma(x)(x_g - x) dx + \int_{x_{cd}}^{x_n} \sigma(x)(x_g - x) dx =$$

$$= f_{cd} x_g x_{cd} - f_{cd} \frac{x_{cd}^2}{2} + \frac{1,75 f_{cd}}{3 x_n^2} \cdot (2 x_n^3 - 3 x_n^2 x_{cd} + x_{cd}^3) x_g - \frac{1,75 f_{cd}}{4 x_n^2} \cdot (x_n^4 - 2 x_n^2 x_{cd}^2 + x_{cd}^4)$$

Regione 6 $H \leq x_n \leq \infty$



Equazioni di equilibrio:	$\begin{cases} N_R = \int_0^{x_n} \sigma(x)b(x)dx + \sigma'_s A'_s + \sigma_s A_s \\ M_R = \int_0^{x_n} \sigma(x)b(x)(x_g - x)dx + \sigma'_s A'_s \cdot (x_g - d') - \sigma_s A_s \cdot (x_i - d'') \end{cases}$
Limite Regione 5-6:	$x_d = H$
Legame costitutivo Acciaio 	$\epsilon_s = \frac{x_n - d}{x_n} \epsilon_{cu} \Rightarrow \sigma_s = \begin{cases} E_s \epsilon_s & \text{per } \epsilon_s \leq \epsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{per } \epsilon_s > \epsilon_{yd} \end{cases}$ $\epsilon'_s = \frac{x_n - d'}{x_n} \epsilon_{cu} \Rightarrow \sigma'_s = \begin{cases} E_s \epsilon'_s & \text{per } \epsilon'_s \leq \epsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{per } \epsilon'_s > \epsilon_{yd} \end{cases}$
Legame costitutivo calcestruzzo 	$\epsilon = (x_n - x) \frac{\epsilon_{cu}}{x_n} \Rightarrow \frac{\epsilon}{\epsilon_{c2}} = 1,75 \frac{(x_n - x)}{x_n}$ $\sigma(x) = \begin{cases} f_{cd} \cdot \left[2 \frac{\epsilon}{\epsilon_{c2}} - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{c2}} \right)^2 \right] & \text{per } \epsilon \leq \epsilon_{c2} \\ f_{cd} & \text{per } \epsilon_{c2} \leq \epsilon \leq \epsilon_{cu} \end{cases}$
Analogamente a quanto detto per la regione 2(b), nella regione 6, al variare di x tra 0 e $x_{cd} = \frac{\epsilon_{cu} - \epsilon_{c2}}{\epsilon_{cu}} x_n$	
risulta $\epsilon_{c2} \leq \epsilon \leq \epsilon_{cu}$ e quindi $\sigma(x) = f_{cd}$.	
ossia:	

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1,75 \cdot f_{cd} \cdot \left[2 \cdot \frac{(x_n - x)}{x_n} - \frac{(x_n - x)^2}{x_n^2} \right] = \frac{1,75 f_{cd}}{x_n^2} \cdot (x_n^2 - x^2) & \text{per } x > x_{cd} \\ f_{cd} & \text{per } x \leq x_{cd} \end{cases}$$

Inoltre, se $x_{cd} \geq H$, qualsiasi sia il valore di $x < H$ risulta sempre $\sigma(x) = f_{cd}$.

Quindi, per $x_{cd} < H$:

$$\begin{aligned} \int_0^{x_n} \sigma(x) dx &= \int_0^{x_{cd}} \sigma(x) dx + \int_{x_{cd}}^{x_n} \sigma(x) dx = f_{cd} x_{cd} + \frac{1,75 f_{cd}}{3 x_n^2} \cdot (2 x_n^3 - 3 x_n^2 x_{cd} + x_{cd}^3) \\ \int_0^{x_n} \sigma(x)(x_g - x) dx &= \int_0^{x_{cd}} \sigma(x)(x_g - x) dx + \int_{x_{cd}}^{x_n} \sigma(x)(x_g - x) dx = \\ &= f_{cd} x_g x_{cd} - f_{cd} \frac{x_{cd}^2}{2} + \frac{1,75 f_{cd}}{3 x_n^2} \cdot (2 x_n^3 - 3 x_n^2 x_{cd} + x_{cd}^3) x_g - \frac{1,75 f_{cd}}{4 x_n^2} \cdot (x_n^4 - 2 x_n^2 x_{cd}^2 + x_{cd}^4) \end{aligned}$$

Per $x_{cd} \geq H$:

$$\begin{aligned} \int_0^{x_n} \sigma(x) dx &= \int_0^{x_{cd}} \sigma(x) dx + \int_{x_{cd}}^{x_n} \sigma(x) dx = f_{cd} H \\ \int_0^{x_n} \sigma(x)(x_g - x) dx &= f_{cd} \int_0^H (x_g - x) dx = f_{cd} \left(x_g H - \frac{H^2}{2} \right) \end{aligned}$$

9.1.2. Verifica della sezione

Si osservi adesso che, come indicato all'art. 4.1.2.1.2.4 "Analisi della sezione" del D.M. 2008, con riferimento alla sezione pressoinflessa, rappresentata in Fig. 4.1.3

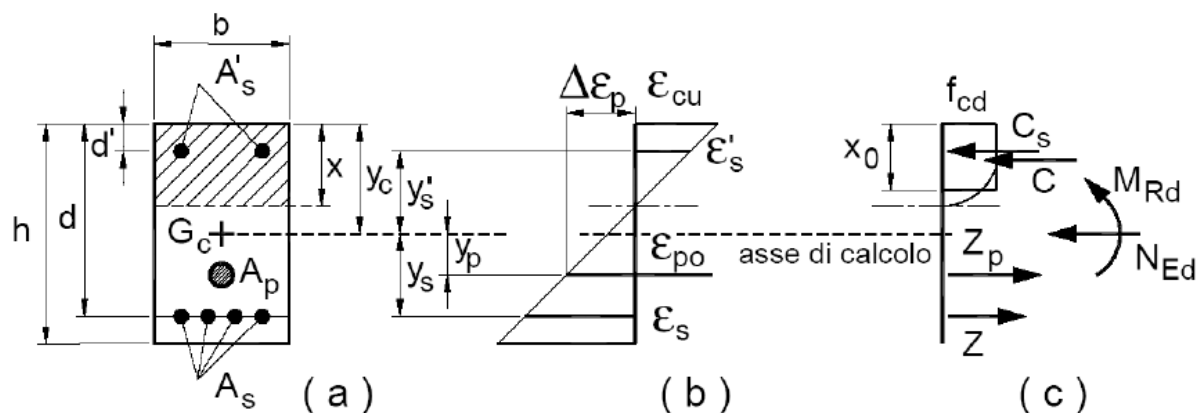


Figura 4.1.3– Sezione pressoinflessa

assieme ai diagrammi di deformazione e di sforzo così come dedotti dalle ipotesi e dai modelli $\sigma - \epsilon$ di cui nei punti precedenti, la verifica di resistenza (SLU) si esegue controllando che:

$$M_{Rd} = M_{Rd}(N_{Ed}) \geq M_{Ed}$$

dove

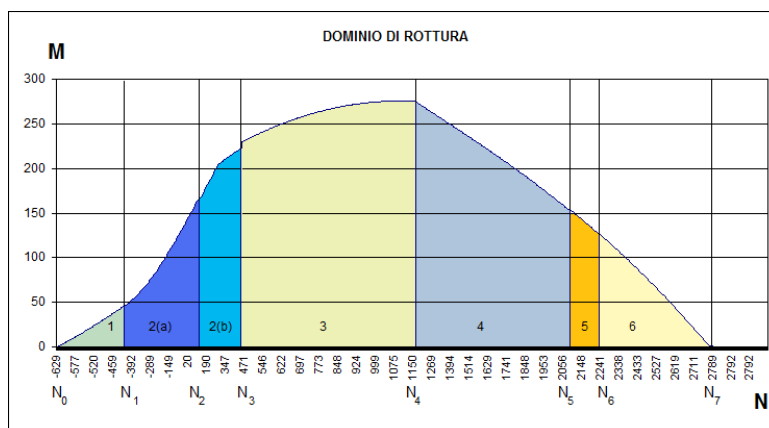
M_{Rd} è il valore di calcolo del momento resistente corrispondente a N_{Ed} ;

N_{Ed} è il valore di calcolo della componente assiale (sforzo normale) dell'azione;

M_{Ed} è il valore di calcolo della componente flettente dell'azione.

Indicati con:

- N_0 il valore di calcolo dello sforzo normale resistente, in corrispondenza del primo punto della regione 1: calcolato per $x_n = x_{n,i}$
- N_1 il valore di calcolo dello sforzo normale resistente, in corrispondenza del primo punto della regione 2(a) (corrispondente con il valore di calcolo dello sforzo normale in corrispondenza dell'ultimo punto della regione 1): calcolato per $x_n = x_{c2}$
- Etc.

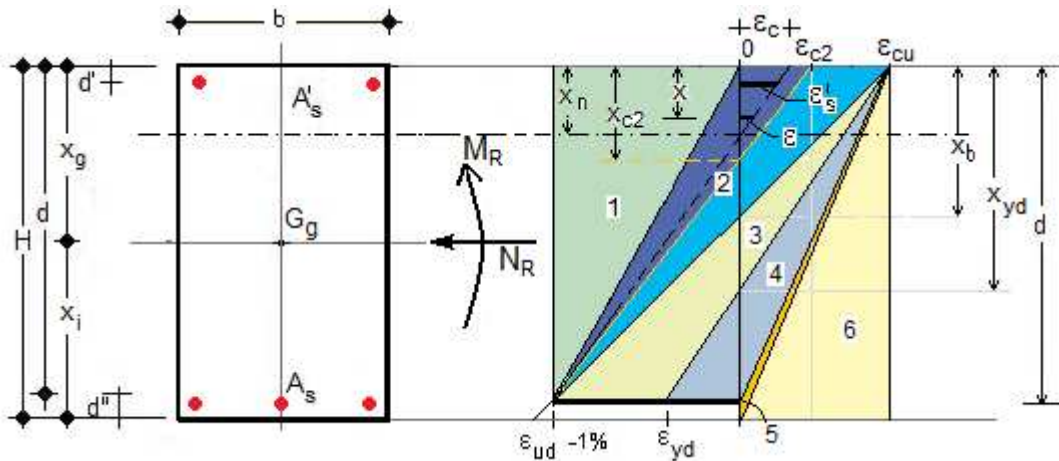


la verifica può essere condotta nel seguente modo:

- si determina la regione i in cui ricade N_{Ed} confrontando lo stesso con i valori di N_i
- si calcola M_{Rd} utilizzando le equazioni di equilibrio della regione i
- si verifica che risulti $M_{Rd} \geq M_{Ed}$

9.2. SLU per Sforzo Normale e Flessione sezione Rettangolare

In particolare, nel caso di sezione rettangolare, essendo $b(x)=b=\text{cost.}$,



Determinati i valori limite di x_n tra le varie regioni:

Limite inferiore Regione 1:
$$x_{n,0} = x_{n,i} = \frac{d' \cdot \varepsilon_{ud} - d \cdot \varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{ud} - \varepsilon_{yd}}$$

Limite Regioni 1 – 2(a) :
$$x_{n,1} = 0$$

Limite Regioni 2(a) – 2(b) :
$$x_{n,2} = x_{c2} = \frac{d \cdot \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{ud}} = \frac{0,20}{1,20} \cdot d = 0,166667 \cdot d$$

Limite Regioni 2(b)-3:
$$x_{n,3} = x_B = \frac{d \cdot \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}} = \frac{0,35}{1,35} \cdot d = 0,259259 \cdot d$$

Limite Regioni 3-4:
$$x_{n,4} = x_{yd} = \frac{d \cdot \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}}$$

Limite Regioni 4-5:
$$x_{n,5} = d$$

Limite Regioni 5-6:
$$x_{n,6} = H$$

Limite Superiore Regione 6:
$$x_{n,7} \text{ non definito}$$

Posto:

$$x_{cd} = \begin{cases} x_{n,i} - 0,20 \cdot (d - x_{n,i}) & \text{per } i = 3 \text{ -- Regione } 2(a) \\ \frac{0,15}{0,35} x_{n,i} & \text{per } i > 3 \text{ -- Regioni } 2(b) - 6 \end{cases}$$

Calcolati i valori delle tensioni σ'_s e σ_s in corrispondenza dei valori limite, risulta:

$$N_0 = \sigma'_{s,0} A'_s + \sigma_{s,0} A_s$$

$$N_1 = \sigma'_{s,1} A'_s + \sigma_{s,1} A_s$$

$$N_2 = b \cdot \frac{5f_{cd}}{3(d - x_{n,2})^2} \cdot [3dx_{n,2}^2 - 8x_{n,2}^3] + \sigma'_{s,2} A'_s + \sigma_{s,2} A_s$$

$$N_3 = b \cdot \left[f_{cd} x_{cd} + \frac{1,75f_{cd}}{3x_{n,3}^2} \cdot (2x_{n,3}^3 - 3x_{n,3}^2 x_{cd} + x_{cd}^3) \right] + \sigma'_{s,3} A'_s + \sigma_{s,3} A_s$$

$$N_4 = b \cdot \left[f_{cd} x_{cd} + \frac{1,75f_{cd}}{3x_{n,4}^2} \cdot (2x_{n,4}^3 - 3x_{n,4}^2 x_{cd} + x_{cd}^3) \right] + \sigma'_{s,4} A'_s + \sigma_{s,4} A_s$$

$$N_5 = b \cdot \left[f_{cd} x_{cd} + \frac{1,75f_{cd}}{3x_{n,5}^2} \cdot (2x_{n,5}^3 - 3x_{n,5}^2 x_{cd} + x_{cd}^3) \right] + \sigma'_{s,5} A'_s + \sigma_{s,5} A_s$$

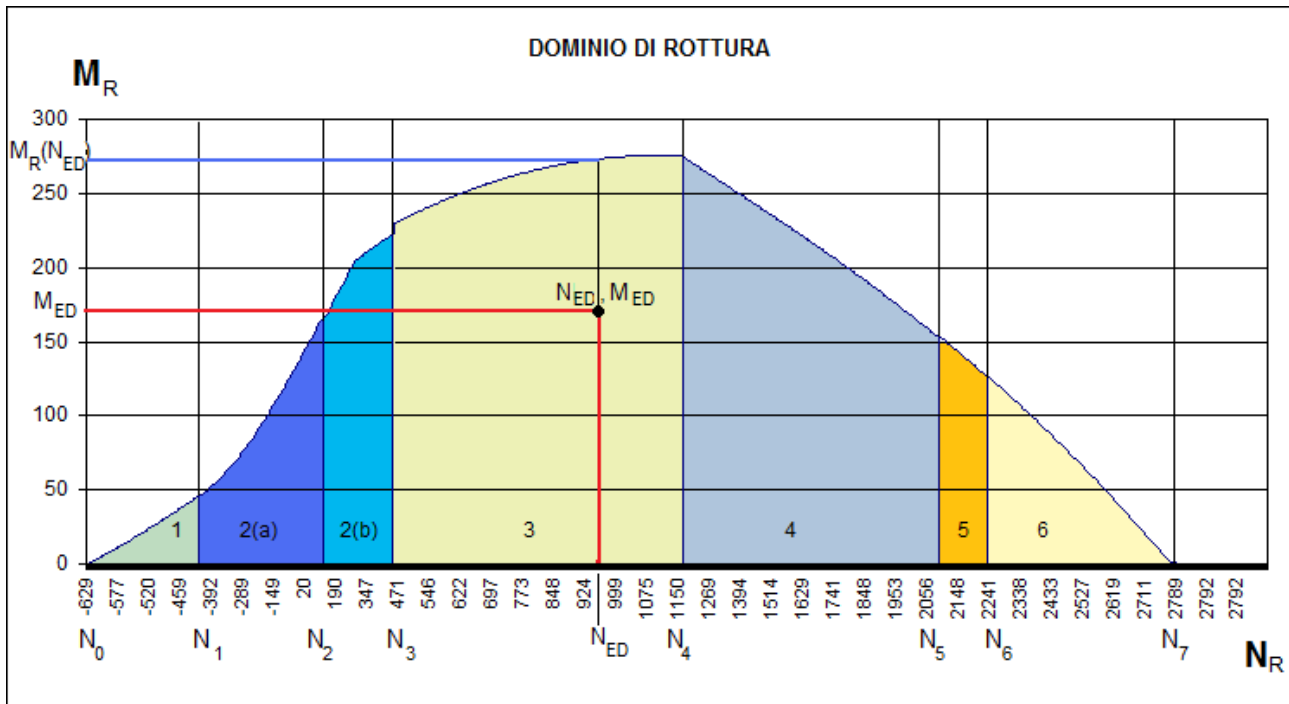
$$N_6 = b \cdot \left[f_{cd} x_{cd} + \frac{1,75f_{cd}}{3x_{n,6}^2} \cdot (2x_{n,6}^3 - 3x_{n,6}^2 x_{cd} + x_{cd}^3) \right] + \sigma'_{s,6} A'_s + \sigma_{s,6} A_s$$

9.2.1. Dominio di Rottura

Si può rappresentare graficamente il dominio di rottura, (N_R,M_R) utilizzando le formule:

Regione 1 $-x_{n,0} \leq x_n \leq x_{n,1}$	
$N_R = \sigma'_s A'_s + \sigma_s A_s$	
$M_R = \sigma'_s A'_s \cdot (x_g - d') - \sigma_s A_s \cdot (x_i - d'')$	
Regione 2(a) $x_{n,1} \leq x_n \leq x_{n,2}$	
$N_R = b \cdot \left[\frac{5f_{cd}}{3(d-x_n)^2} \cdot [3dx_n^2 - 8x_n^3] \right] + \sigma'_s A'_s + \sigma_s A_s$	
$M_R = b \cdot \left[\frac{5f_{cd}}{12(d-x_n)^2} \cdot (12dx_g x_n^2 - 32x_g x_n^3 - 4dx_n^3 + 9x_n^4) \right] + \sigma'_s A'_s - \sigma_s A_s$	
Regione 2(b) $x_{n,2} \leq x_n \leq x_{n,3}$	
$N_R = b \cdot \left[f_{cd} x_{cd} + \frac{5f_{cd}}{3(d-x_n)^2} \cdot (3dx_n^2 - 8x_n^3 - 6dx_n x_{cd} + 3dx_{cd}^2 + 21x_n^2 x_{cd} - 18x_n x_{cd}^2 + 5x_{cd}^3) \right] + \sigma'_s A'_s + \sigma_s A_s$	
$M_R = b \cdot \left\{ f_{cd} x_g x_{cd} - f_{cd} \frac{x_{cd}^2}{2} + \frac{5f_{cd}}{(d-x_n)^2} \cdot \left[dx_n^2 - \frac{8}{3}x_n^3 - 2dx_n x_{cd} + dx_{cd}^2 + 7x_n^2 x_{cd} - 6x_n x_{cd}^2 + 5\frac{x_{cd}^3}{3} \right] x_g \right\} +$ $- b \cdot \left\{ \frac{5f_{cd}}{12(d-x_n)^2} \cdot [4dx_n^3 - 9x_n^4 - 12dx_n x_{cd}^2 + 8dx_{cd}^3 + 42x_n^2 x_{cd}^2 - 48x_n x_{cd}^3 + 15x_{cd}^4] \right\} + \sigma'_s A'_s - \sigma_s A_s$	
Regione 3-4-5 $x_{n,i} \leq x_n \leq x_{n,i+1}$	
$N_R = b \cdot \left[f_{cd} x_{cd} + \frac{1,75f_{cd}}{3x_n^2} \cdot (2x_n^3 - 3x_n^2 x_{cd} + x_{cd}^3) \right] + \sigma'_s A'_s + \sigma_s A_s$	
$M_R = b \cdot \left\{ f_{cd} x_g x_{cd} - f_{cd} \frac{x_{cd}^2}{2} + \frac{1,75f_{cd}}{3x_n^2} \cdot (2x_n^3 - 3x_n^2 x_{cd} + x_{cd}^3) x_g - \frac{1,75f_{cd}}{4x_n^2} \cdot (x_n^4 - 2x_n^2 x_{cd}^2 + x_{cd}^4) \right\} +$ $+ \sigma'_s A'_s - \sigma_s A_s$	
Regione 6 $x_{n,6} \leq x_n \leq \infty$	
$N_R = b \cdot \left[f_{cd} x_{cd} + \frac{1,75f_{cd}}{3x_n^2} \cdot (2x_n^3 - 3x_n^2 x_{cd} + x_{cd}^3) \right] + \sigma'_s A'_s + \sigma_s A_s$ per $x_{cd} \leq H$ $N_R = b \cdot f_{cd} H + \sigma'_s A'_s + \sigma_s A_s$ per $x_{cd} > H$	
$M_R = b \cdot \left\{ f_{cd} x_g x_{cd} - f_{cd} \frac{x_{cd}^2}{2} + \frac{1,75f_{cd}}{3x_n^2} \cdot (2x_n^3 - 3x_n^2 x_{cd} + x_{cd}^3) x_g - \frac{1,75f_{cd}}{4x_n^2} \cdot (x_n^4 - 2x_n^2 x_{cd}^2 + x_{cd}^4) \right\} + \sigma'_s A'_s - \sigma_s A$ per $x_{cd} \leq H$ $M_R = b \cdot f_{cd} (x_g H - \frac{H^2}{2}) + \sigma'_s A'_s - \sigma_s A$ per $x_{cd} > H$	

9.2.2. Verifica della Sezione



Utilizzando le formule sopraindicate, si confronta N_{ED} con i valori di N_i , e

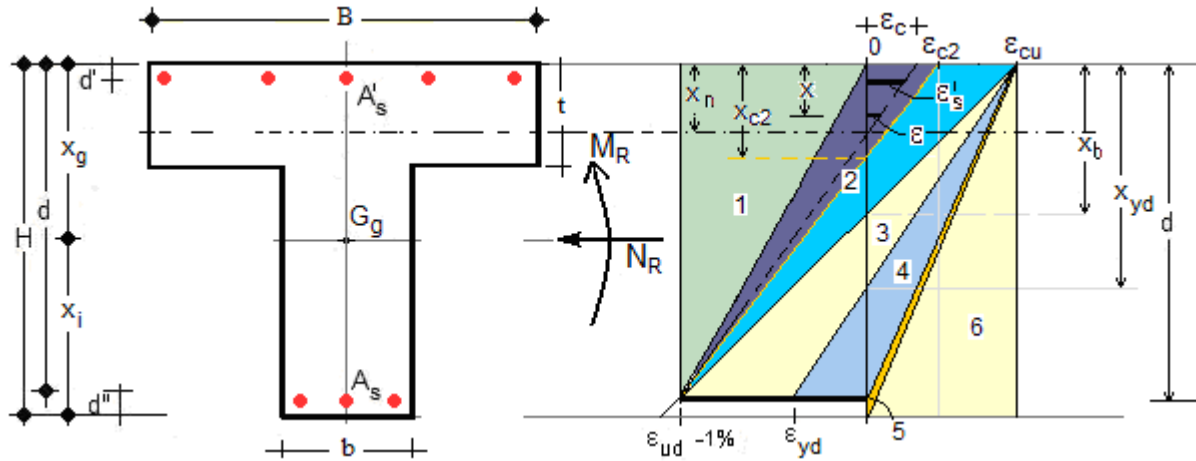
- si determina la regione **i** in cui ricade N_{ED} confrontando lo stesso con i valori di N_i
- si calcola M_{Rd} utilizzando le equazioni di equilibrio della regione **i**
- si verifica che risulti $M_{Rd} \geq M_{ED}$

Poiché N_7 , è di difficile determinazione, nel caso in cui $N_{ED} > N_6$, si calcola M_R con le formule della regione 6, se $M_R < 0$ significa che la sezione non verifica, in caso contrario si controlla se $M_{ED} < M_R$.

9.3. SLU per Sforzo Normale e Flessione sezione a T

Nel caso di sezione a T, essendo:

$$b(x) = \begin{cases} B & \text{per } 0 \leq x \leq t \\ b & \text{per } x > t \end{cases}$$



Determinati i valori limite di x_n tra le varie regioni:

Limite inferiore Regione 1: $x_{n,0} = x_{n,i} = \frac{d' \varepsilon_{ud} - d \varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{ud} - \varepsilon_{yd}}$

Limite Regioni 1 – 2(a): $x_{n,1} = 0$

Limite Regioni 2(a) – 2(b): $x_{n,2} = x_{c2} = \frac{d \cdot \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{ud}} = \frac{0,20}{1,20} \cdot d = 0,166667 \cdot d$

Limite Regioni 2(b)-3: $x_{n,3} = x_B = \frac{d \cdot \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{ud}} = \frac{0,35}{1,35} \cdot d = 0,259259 \cdot d$

Limite Regioni 3-4: $x_{n,4} = x_{yd} = \frac{d \cdot \varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}}$

Limite Regioni 4-5: $x_{n,5} = d$

Limite Regioni 5-6: $x_{n,6} = H$

Limite Superiore Regione 6: $x_{n,7}$ non definito

Posto:

$$x_{cd} = \begin{cases} x_{n,i} - 0,20 \cdot (d - x_{n,i}) & \text{per } i = 3 \text{ – Regione } 2(a) \\ \frac{0,15}{0,35} x_{n,i} & \text{per } i > 3 \text{ – Regioni } 2(b) - 6 \end{cases}$$

Calcolati i valori delle tensioni σ'_s e σ_s in corrispondenza dei valori limite, risulta:

$$N_0 = \sigma'_{s,0} A'_s + \sigma_{s,0} A_s$$

$$N_1 = \sigma'_{s,1} A'_s + \sigma_{s,1} A_s$$

$$N_2 = bx \cdot \frac{5f_{cd}}{3(d - x_{n,2})^2} \cdot [3dx_{n,2}^2 - 8x_{n,2}^3] + \sigma'_{s,2} A'_s + \sigma_{s,2} A_s$$

$$N_3 = bx \cdot \left[f_{cd} x_{cd} + \frac{1,75f_{cd}}{3x_{n,3}^2} \cdot (2x_{n,3}^3 - 3x_{n,3}^2 x_{cd} + x_{cd}^3) \right] + \sigma'_{s,3} A'_s + \sigma_{s,3} A_s$$

$$N_4 = bx \cdot \left[f_{cd} x_{cd} + \frac{1,75f_{cd}}{3x_{n,4}^2} \cdot (2x_{n,4}^3 - 3x_{n,4}^2 x_{cd} + x_{cd}^3) \right] + \sigma'_{s,4} A'_s + \sigma_{s,4} A_s$$

$$N_5 = bx \cdot \left[f_{cd} x_{cd} + \frac{1,75f_{cd}}{3x_{n,5}^2} \cdot (2x_{n,5}^3 - 3x_{n,5}^2 x_{cd} + x_{cd}^3) \right] + \sigma'_{s,5} A'_s + \sigma_{s,5} A_s$$

$$N_6 = bx \cdot \left[f_{cd} x_{cd} + \frac{1,75f_{cd}}{3x_{n,6}^2} \cdot (2x_{n,6}^3 - 3x_{n,6}^2 x_{cd} + x_{cd}^3) \right] + \sigma'_{s,6} A'_s + \sigma_{s,6} A_s$$

dove:

$$bx = \begin{cases} B & \text{per } 0 \leq x_n \leq t \\ b & \text{per } x_n > t \end{cases}$$

9.3.1. Dominio di Rottura

Si può rappresentare graficamente il dominio di rottura, (N_R, M_R) utilizzando le formule:

Regione 1 $-x_{n,0} \leq x_n \leq x_{n,1}$	
$N_R = \sigma'_s A'_s + \sigma_s A_s$	
$M_R = \sigma'_s A'_s \cdot (x_g - d') - \sigma_s A_s \cdot (x_i - d'')$	
Regione 2(a) $x_{n,1} \leq x_n \leq x_{n,2}$	
$N_R = b x \cdot \left[\frac{5 f_{cd}}{3(d - x_n)^2} \cdot [3 d x_n^2 - 8 x_n^3] \right] + \sigma'_s A'_s + \sigma_s A_s$	
$M_R = b x \cdot \left[\frac{5 f_{cd}}{12(d - x_n)^2} \cdot (12 d x_g x_n^2 - 32 x_g x_n^3 - 4 d x_n^3 + 9 x_n^4) \right] + \sigma'_s A'_s - \sigma_s A_s$	
Regione 2(b) $x_{n,2} \leq x_n \leq x_{n,3}$	
$N_R = b x \cdot \left[f_{cd} x_{cd} + \frac{5 f_{cd}}{3(d - x_n)^2} \cdot (3 d x_n^2 - 8 x_n^3 - 6 d x_n x_{cd} + 3 d x_{cd}^2 + 21 x_n^2 x_{cd} - 18 x_n x_{cd}^2 + 5 x_{cd}^3) \right] + \sigma'_s A'_s + \sigma_s A_s$	
$M_R = b x \cdot \left\{ f_{cd} x_g x_{cd} - f_{cd} \frac{x_{cd}^2}{2} + \frac{5 f_{cd}}{(d - x_n)^2} \cdot \left[d x_n^2 - \frac{8}{3} x_n^3 - 2 d x_n x_{cd} + d x_{cd}^2 + 7 x_n^2 x_{cd} - 6 x_n x_{cd}^2 + 5 \frac{x_{cd}^3}{3} \right] x_g \right\} +$ $- b x \cdot \left\{ \frac{5 f_{cd}}{12(d - x_n)^2} \cdot [4 d x_n^3 - 9 x_n^4 - 12 d x_n x_{cd}^2 + 8 d x_{cd}^3 + 42 x_n^2 x_{cd}^2 - 48 x_n x_{cd}^3 + 15 x_{cd}^4] \right\} + \sigma'_s A'_s - \sigma_s A_s$	
Regione 3-4-5 $x_{n,i} \leq x_n \leq x_{n,i+1}$	
$N_R = b x \cdot \left[f_{cd} x_{cd} + \frac{1,75 f_{cd}}{3 x_n^2} \cdot (2 x_n^3 - 3 x_n^2 x_{cd} + x_{cd}^3) \right] + \sigma'_s A'_s + \sigma_s A_s$	
$M_R = b x \cdot \left\{ f_{cd} x_g x_{cd} - f_{cd} \frac{x_{cd}^2}{2} + \frac{1,75 f_{cd}}{3 x_n^2} \cdot (2 x_n^3 - 3 x_n^2 x_{cd} + x_{cd}^3) x_g - \frac{1,75 f_{cd}}{4 x_n^2} \cdot (x_n^4 - 2 x_n^2 x_{cd}^2 + x_{cd}^4) \right\} +$ $+ \sigma'_s A'_s - \sigma_s A_s$	
Regione 6 $x_{n,6} \leq x_n \leq \infty$	
$N_R = b x \cdot \left[f_{cd} x_{cd} + \frac{1,75 f_{cd}}{3 x_n^2} \cdot (2 x_n^3 - 3 x_n^2 x_{cd} + x_{cd}^3) \right] + \sigma'_s A'_s + \sigma_s A_s$ per $x_{cd} \leq H$	
$N_R = b x \cdot f_{cd} H + \sigma'_s A'_s + \sigma_s A_s$ per $x_{cd} > H$	
$M_R = b x \cdot \left\{ f_{cd} x_g x_{cd} - f_{cd} \frac{x_{cd}^2}{2} + \frac{1,75 f_{cd}}{3 x_n^2} \cdot (2 x_n^3 - 3 x_n^2 x_{cd} + x_{cd}^3) x_g - \frac{1,75 f_{cd}}{4 x_n^2} \cdot (x_n^4 - 2 x_n^2 x_{cd}^2 + x_{cd}^4) \right\} + \sigma'_s A'_s - \sigma_s A$ per $x_{cd} \leq H$	
$M_R = b x \cdot f_{cd} (x_g H - \frac{H^2}{2}) + \sigma'_s A'_s - \sigma_s A$ per $x_{cd} > H$	

9.4. SLU per Sforzo Normale e Flessione - Metodo Numerico

Poiché a seconda del tipo di sezione, $b(x)$ può non essere costante ma variabile al variare di x , se si conosce la legge matematica di variazione di $b(x)$, è possibile calcolare gli integrali:

$$\int_0^{x_n} \sigma(x)b(x)dx \quad , \quad \int_0^{x_n} \sigma(x)b(x)(x_g - x)dx$$

mediante il seguente metodo numerico approssimato,

dividendo l'intervallo $[0, x_n]$ in n parti, e posto $\Delta = x_n / n$ può scriversi:

$$\int_0^{x_n} \sigma(x)b(x)dx = \sum_{i=1}^n \sigma(x_i)b(x_i)\Delta X$$

$$\int_0^{x_n} \sigma(x)b(x)(x_g - x)dx = \sum_{i=1}^n \sigma(x_i)b(x_i)(x_g - x_i)\Delta X$$

Si può rappresentare graficamente il dominio di rottura, (NR,MR) utilizzando le formule:

Regione 1 $-x_{n,0} \leq x_n \leq x_{n,1}$	
$\sigma_s = -f_{yd} \quad ; \quad \varepsilon'_s = \frac{d' - x_n}{d - x_n} \varepsilon_{ud} \quad ; \quad \sigma'_s = \begin{cases} -E_s \varepsilon'_s & \text{per } \varepsilon'_s \leq \varepsilon_{yd} \\ -f_{yd} & \text{per } \varepsilon'_s > \varepsilon_{yd} \end{cases}$	
$N_R = \sigma'_s A'_s + \sigma_s A_s$	
$M_R = \sigma'_s A'_s \cdot (x_g - d') - \sigma_s A_s \cdot (x_i - d'')$	
Regione 2(a) $x_{n,1} \leq x_n \leq x_{n,2}$	
$\sigma_s = -f_{yd} \quad ; \quad \varepsilon'_s = \frac{x_n - d'}{d - x_n} \varepsilon_{ud} \quad ; \quad \sigma'_s = \begin{cases} -E_s \varepsilon'_s & \text{per } \varepsilon'_s \leq \varepsilon_{yd} \\ -f_{yd} & \text{per } \varepsilon'_s > \varepsilon_{yd} \end{cases}$	
$x_{cd} = x_n - (d - x_n) \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{ud}} = x_n - 0,20 \cdot (d - x_n)$	
$\sigma(x) = \begin{cases} 5f_{cd} \left[2 \frac{(x_n - x)}{(d - x_n)} - 5 \frac{(x_n - x)^2}{(d - x_n)^2} \right] = \frac{5f_{cd}}{(d - x_n)^2} (2dx_n - 2dx - 7x_n^2 + 12x_n x - 5x^2) & \text{per } x > x_{cd} \\ f_{cd} & \text{per } x \leq x_{cd} \end{cases}$	
$N_R = \sum_{i=1}^n \sigma(x_i)b(x_i)\Delta X + \sigma'_s A'_s + \sigma_s A_s$	
$M_R = \sum_{i=1}^n \sigma(x_i)b(x_i)(x_g - x_i)\Delta X + \sigma'_s A'_s \cdot (x_g - d') - \sigma_s A_s \cdot (x_i - d'')$	

Regione 2(b) $x_{n,2} \leq x_n \leq x_{n,3}$	
$\sigma_s = -f_{yd} \quad ; \quad \varepsilon'_s = \frac{x_n - d'}{d - x_n} \varepsilon_{ud} \quad ; \quad \sigma'_s = \begin{cases} -E_s \varepsilon'_s & \text{per } \varepsilon'_s \leq \varepsilon_{yd} \\ -f_{yd} & \text{per } \varepsilon'_s > \varepsilon_{yd} \end{cases}$ $x_{cd} = x_n - (d - x_n) \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{ud}} = x_n - 0,20 \cdot (d - x_n)$ $\sigma(x) = \begin{cases} \frac{5f_{cd}}{(d - x_n)^2} (2dx_n - 2dx - 7x_n^2 + 12x_n x - 5x^2) & \text{per } x > x_{cd} \\ f_{cd} & \text{per } x \leq x_{cd} \end{cases}$	
NR ed MR calcolati con le stesse formule della regione 2(a)	
Regione 3 $x_{n,3} \leq x_n \leq x_{n,4}$	
$\sigma_s = -E_s \varepsilon_s \quad ; \quad \varepsilon'_s = \frac{x_n - d'}{x_n} \varepsilon_{cu} \quad ; \quad \sigma'_s = \begin{cases} E_s \varepsilon'_s & \text{per } \varepsilon'_s \leq \varepsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{per } \varepsilon'_s > \varepsilon_{yd} \end{cases}$ $x_{cd} = \frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} x_n$ $\sigma(x) = \begin{cases} \frac{1,75f_{cd}}{x_n^2} \cdot (x_n^2 - x^2) & \text{per } x > x_{cd} \\ f_{cd} & \text{per } x \leq x_{cd} \end{cases}$	
NR ed MR calcolati con le stesse formule della regione 2(a)	
Regione 4 $x_{n,4} \leq x_n \leq x_{n,5}$	
$\varepsilon_s = \frac{d - x_n}{x_n} \varepsilon_{cu} \leq \varepsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = -E_s \varepsilon_s \quad ; \quad \varepsilon'_s = \frac{x_n - d'}{x_n} \varepsilon_{cu} \Rightarrow \sigma'_s = \begin{cases} E_s \varepsilon'_s & \text{per } \varepsilon'_s \leq \varepsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{per } \varepsilon'_s > \varepsilon_{yd} \end{cases}$ $x_{cd} = \frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} x_n$ $\sigma(x) = \begin{cases} \frac{1,75f_{cd}}{x_n^2} \cdot (x_n^2 - x^2) & \text{per } x > x_{cd} \\ f_{cd} & \text{per } x \leq x_{cd} \end{cases}$	
NR ed MR calcolati con le stesse formule della regione 2(a)	

Regione 5 $x_{n,5} \leq x_n \leq x_{n,6}$	
$\varepsilon_s = \frac{x_n - d}{x_n} \varepsilon_{cu} \Rightarrow \sigma_s = \begin{cases} E_s \varepsilon_s & \text{per } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{per } \varepsilon_s > \varepsilon_{yd} \end{cases}$ $\varepsilon'_s = \frac{x_n - d'}{x_n} \varepsilon_{cu} \Rightarrow \sigma'_s = \begin{cases} E_s \varepsilon'_s & \text{per } \varepsilon'_s \leq \varepsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{per } \varepsilon'_s > \varepsilon_{yd} \end{cases}$ $x_{cd} = \frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} x_n$ $\sigma(x) = \begin{cases} \frac{1,75 f_{cd}}{x_n^2} \cdot (x_n^2 - x^2) & \text{per } x > x_{cd} \\ f_{cd} & \text{per } x \leq x_{cd} \end{cases}$	
NR ed MR calcolati con le stesse formule della regione 2(a)	
Regione 6 $x_{n,6} \leq x_n \leq x_{n,7}$	
$\varepsilon_s = \frac{x_n - d}{x_n} \varepsilon_{cu} \Rightarrow \sigma_s = \begin{cases} E_s \varepsilon_s & \text{per } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{per } \varepsilon_s > \varepsilon_{yd} \end{cases}$ $\varepsilon'_s = \frac{x_n - d'}{x_n} \varepsilon_{cu} \Rightarrow \sigma'_s = \begin{cases} E_s \varepsilon'_s & \text{per } \varepsilon'_s \leq \varepsilon_{yd} \\ f_{yd} & \text{per } \varepsilon'_s > \varepsilon_{yd} \end{cases}$ $x_{cd} = \frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} x_n$ $\sigma(x) = \begin{cases} \frac{1,75 f_{cd}}{x_n^2} \cdot (x_n^2 - x^2) & \text{per } x > x_{cd} \\ f_{cd} & \text{per } x \leq x_{cd} \end{cases}$	
NR ed MR calcolati con le stesse formule della regione 2(a)	

Infine la verifica viene condotta utilizzando le formule sopraindicate

- si determina la regione **i** in cui ricade N_{Ed} confrontando lo stesso con i valori di N_i
- si calcola M_{Rd} utilizzando le equazioni di equilibrio della regione **i**
- si verifica che risulti $M_{Rd} \geq M_{Ed}$

9.4.1. Confronto tra metodo matematico e metodo numerico

9.4.1.1. Esempio 1 – Sezione Rettangolare

Data la sezione avente le seguenti caratteristiche geometriche:

[SIM srl] - Sezione Rettangolare

Verifica Stati Limite - Sezione Rettangolare C.A.

Dati Sezione | Materiali | S.L.U. Normale + Flessione | S.L.U. Taglio | S.L.E. Fessurazione | Relazione

Caratteristiche Geometriche

B (mm) = 300
H (mm) = 500
A (mm²) = 150000,00
I_y = 312500000,00
W_y = 12500000,00
I_z = 112500000,00
W_z = 7500000,00

Armature

N° e Diametro A (mm²)
A's = 4φ16 804
A_s = 4φ16 804
Coprifetto d'=d'' (mm.) = 30

Sollecitazioni

Sforzo Assiale N_x (kN) = 0
Momento M_y (kN·m) = 0
Taglio T_z (kN) = 0

Sollecitazioni piano y (eventuale Flessione Deviate)

Momento M_z (kN·m) = 0
Taglio T_y (kN) = 0
A's = 0
A_s = 0

Modelli Costituttivi Materiali

CLS.: Parabola Rettangolo Acciaio: Elastico perfettamente Plastico

Diagrammi

σ-ε diagramma per il calcestruzzo (Parabola Rettangolo) e σ-ε diagramma per l'acciaio (Elastico perfettamente Plastico).

Diagrammi di Sollecitazione

Diagrammi di sollecitazione (M_y, N_x, T_z) e diagrammi di deformazione (ε_{su}, ε_{yd}, ε_{c2}, ε_{cu}).

Regioni

Regione 1: -∞ < x_n ≤ 0
Regioni 2-5: 0 ≤ x_n ≤ H
Regione 6: H < x_n < ∞

e le seguenti caratteristiche meccaniche:

[SIM srl] - Sezione Rettangolare

Verifica Stati Limite - Sezione Rettangolare C.A.

Dati Sezione | Materiali | S.L.U. Normale + Flessione | S.L.U. Taglio | S.L.E. Fessurazione | Relazione

Calcestruzzo

Resistenza Caratteristica Cubica R_{ck} = 30 N/mm²
Resistenza Caratteristica Cilindrica f_{ck} = 24,90 N/mm² = 0,83 · R_{ck}
Coefficiente di sicurezza parziale per il calcestruzzo γ_c = 1,5
Coefficiente che tiene conto degli effetti di lungo termine α_{cc} = 0,85
Valore medio della resistenza a compressione cilindrica f_{cm} = 32,90 N/mm² = f_{ck} + 8
Valore medio della resistenza a trazione assiale del cls f_{ctm} = 2,60 N/mm² = 2,12 · ln(1 + f_{cm}/10)
Valore caratt. resistenza a trazione assiale (frattile 5%) f_{ctk, 0.05} = 1,80 N/mm² = 0,7 · f_{ctm}
Valore caratt. resistenza a trazione assiale (frattile 95%) f_{ctk, 0.95} = 3,30 N/mm² = 1,3 · f_{ctm}
Modulo di elasticità secante del calcestruzzo E_{cm} = 31447,00 N/mm² = 22000 · [f_{cm}/10]^{0,3}
Deformazione Limite comportamento Elasto-Plastico ε_{c2} = 0,002
Deformazione Ultima per il calcestruzzo ε_{cu} = 0,0035

Resistenza di progetto a compressione del cls f_{cd} = 14,11 N/mm² = α_{cc} · f_{ck} / γ_c
Resistenza di progetto a trazione del cls f_{ctd} = 1,19 N/mm² = f_{ctk, 0.05} / γ_c

Acciaio

Resistenza a snervamento dell'Acciaio f_{yk} = 450 N/mm²
Coefficiente di sicurezza parziale per l'acciaio γ_s = 1,15
Modulo di Elasticità secante dell'Acciaio E_s = 210000 N/mm²
Deformazione a snervamento dell'acciaio ε_{yd} = 0,001863 f_{yd} / E_s
Deformazione Ultima nell'Acciaio ε_{ud} = 0,01 1%

Resistenza di progetto a trazione dell'acciaio f_{yd} = 391,30 N/mm² = f_{yk} / γ_s

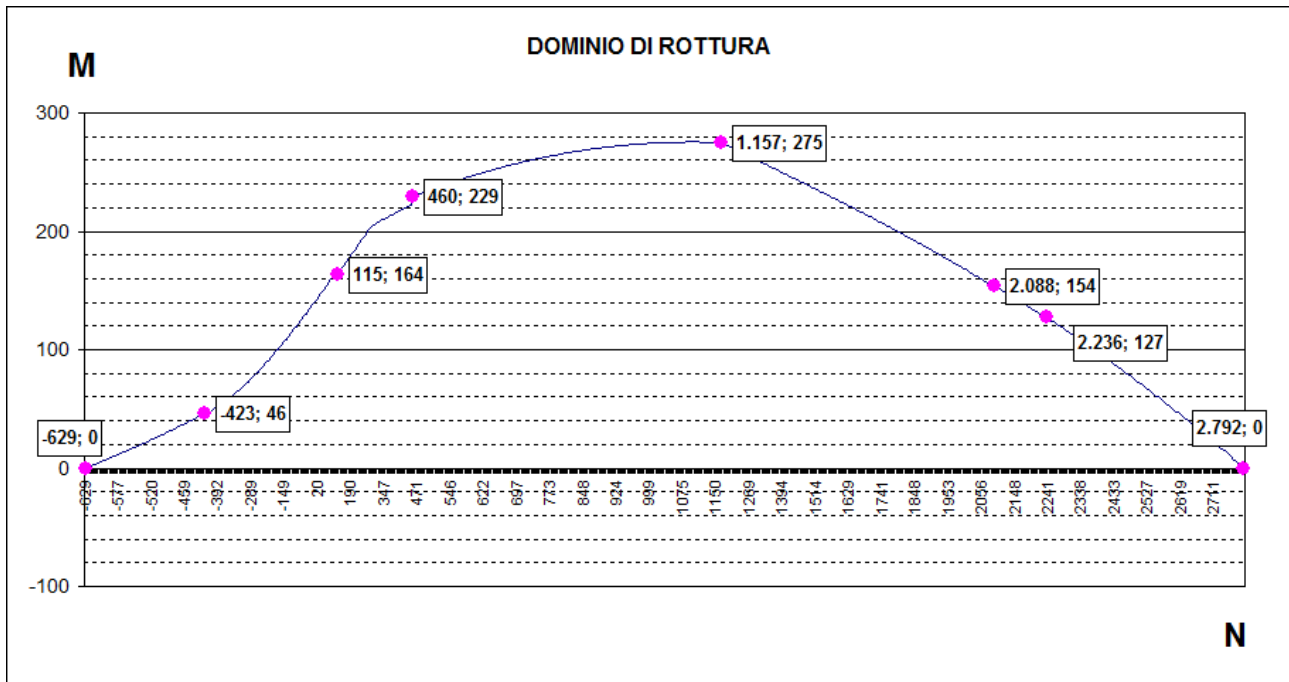
Modello Parabola Rettangolo

σ-ε diagramma per il calcestruzzo (Parabola Rettangolo).

Diagrammi di Sollecitazione

Diagrammi di sollecitazione (M_y, N_x, T_z) e diagrammi di deformazione (ε_{su}, ε_{yd}, ε_{c2}, ε_{cu}).

Utilizzando le formule matematiche si ottiene il seguente Dominio di Rottura:



nel quale sono evidenziati i valori delle coppie (N_{RD}, M_{RD}) in corrispondenza dei punti di separazione delle varie regioni, e quindi:

$$N_0 = \sigma'_{s,0} A'_s + \sigma_{s,0} A_s = -629 \text{ kN}$$

$$N_1 = \sigma'_{s,1} A'_s + \sigma_{s,1} A_s = -423 \text{ kN}$$

$$N_2 = b \cdot \frac{5 f_{cd}}{3(d - x_{n,2})^2} \cdot [3dx_{n,2}^2 - 8x_{n,2}^3] + \sigma'_{s,2} A'_s + \sigma_{s,2} A_s = 115 \text{ kN}$$

$$N_3 = b \cdot \left[f_{cd} x_{cd} + \frac{1,75 f_{cd}}{3x_{n,3}^2} \cdot (2x_{n,3}^3 - 3x_{n,3}^2 x_{cd} + x_{cd}^3) \right] + \sigma'_{s,3} A'_s + \sigma_{s,3} A_s = 460 \text{ kN}$$

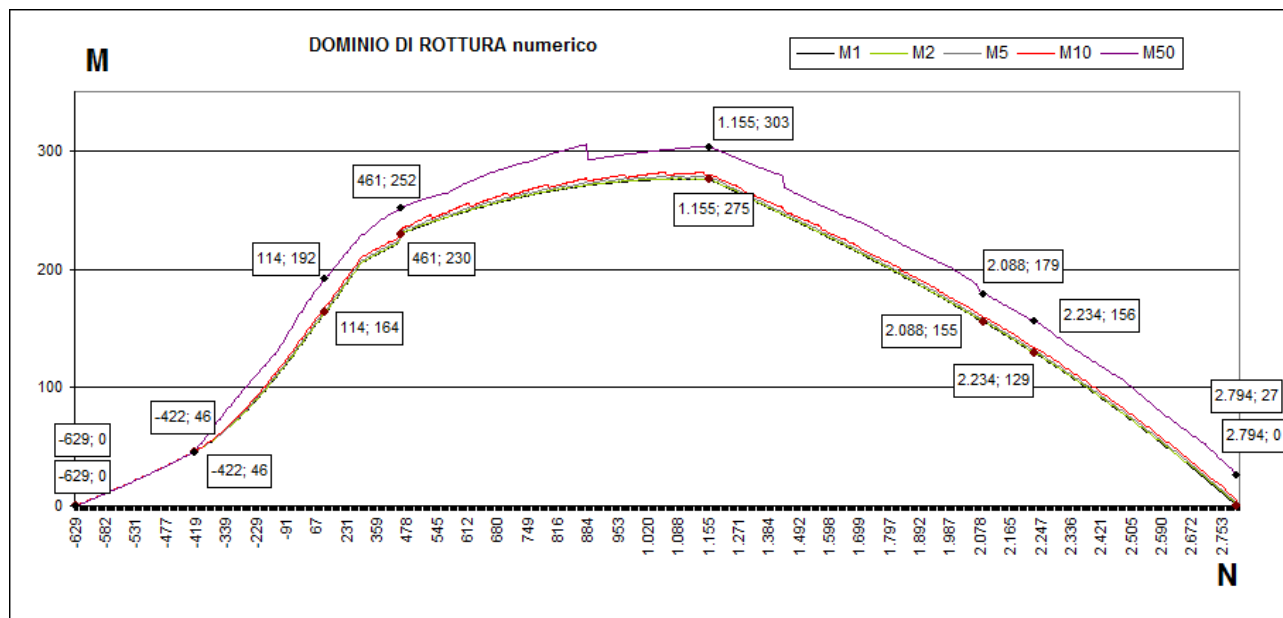
$$N_4 = b \cdot \left[f_{cd} x_{cd} + \frac{1,75 f_{cd}}{3x_{n,4}^2} \cdot (2x_{n,4}^3 - 3x_{n,4}^2 x_{cd} + x_{cd}^3) \right] + \sigma'_{s,4} A'_s + \sigma_{s,4} A_s = 1.157 \text{ kN}$$

$$N_5 = b \cdot \left[f_{cd} x_{cd} + \frac{1,75 f_{cd}}{3x_{n,5}^2} \cdot (2x_{n,5}^3 - 3x_{n,5}^2 x_{cd} + x_{cd}^3) \right] + \sigma'_{s,5} A'_s + \sigma_{s,5} A_s = 2.088 \text{ kN}$$

$$N_6 = b \cdot \left[f_{cd} x_{cd} + \frac{1,75 f_{cd}}{3x_{n,6}^2} \cdot (2x_{n,6}^3 - 3x_{n,6}^2 x_{cd} + x_{cd}^3) \right] + \sigma'_{s,6} A'_s + \sigma_{s,6} A_s = 2.236 \text{ kN}$$

$$N_7 = N \text{ } \forall (M = 0) = 2.792 \text{ kN}$$

Utilizzando il metodo numerico, ossia approssimato, per la stessa sezione si ottengono i seguenti Domini di Rottura, al variare della precisione con cui si calcolano gli integrali (DX=1mm – Precisione maggiore; DX=50mm – Precisione minore)



Anche nel grafico sopra riportato, si sono evidenziati i valori delle coppie (N_{RD} , M_{RD}) in corrispondenza dei punti di separazione delle varie regioni, per DX=1mm (curva M1) e DX=50mm (curva M50).

Come si evince dal confronto tra il dominio di rottura determinato con il metodo matematico e quello determinato con il metodo numerico, il metodo numerico conduce a risultati prossimi al metodo matematico per DX=1mm, mentre conduce a risultati con errori del 10% circa per DX=50mm.

9.4.1.2. Esempio 2 – Sezione a T

Data la sezione avente le seguenti caratteristiche geometriche:

[SIM srl] - Sezione a T

Verifica Stati Limite - Sezione a T in C.A.

1 / 0 Aggiungi Sezione Rimuovi Sezione

Dati Sezione | Materiali | S.L.U. Normale + Flessione | S.L.U. Taglio | S.L.E. Fessurazione | Duttilità / Arm. Minima | Risultati Verifiche

Caratteristiche Geometriche

B (mm) = 700
H (mm) = 500
b (mm) = 300
t (mm) = 200
A (mm²) = 230000,00
I_y = 0
W_y = 0
I_z = 0
W_z = 0

Armature

N° e Diametro A (mm²)
A's = 2φ16 402
A_s = 3φ16 603
Copriferro d'=d'' (mm.) = 20

Sollecitazioni

Sforzo Assiale N_x (kN) = 0
Momento M_y (kN-m) = 19
Taglio T_z (kN) = 0

Tipo Sezione: Trave Descriz.: Esempio 1

Modelli Costitutivi Materiali
CLS.: Parabola Rettangolo Acciaio: Elastico perfettamente Plastico

Diagrammi

σ-ε per CLS: Parabola Rettangolo
σ-ε per Acciaio: Elastico perfettamente Plastico

Diagrammi di Sollecitazione

My, Nx, Tz

Diagrammi di Deformazione

ε_{su}, ε_{yd}, ε_{c2}, ε_{cu}

Regioni

Regione 1: -∞ < x_n < 0
Regioni 2-5: 0 ≤ x_n ≤ H
Regione 6: H < x_n < ∞

Progetta Armature

Registra Dati e Verifica

Esci

e le seguenti caratteristiche meccaniche:

[SIM srl] - Sezione a T

Verifica Stati Limite - Sezione a T in C.A.

1 / 0 Aggiungi Sezione Rimuovi Sezione

Dati Sezione | **Materiali** | S.L.U. Normale + Flessione | S.L.U. Taglio | S.L.E. Fessurazione | Duttilità / Arm. Minima | Risultati Verifiche

Calcestruzzo

Classe di Resistenza: C25/30 ordinario

Resistenza Caratteristica Cubica: R_{ck} = 30 N/mm²
Resistenza Caratteristica Cilindrica: f_{ck} = 24,90 N/mm²
Coefficiente di sicurezza parziale per il calcestruzzo: γ_c = 1,5
Coefficiente che tiene conto degli effetti di lungo termine: α_{cc} = 0,85
Valore medio della resistenza a compressione cilindrica: f_{cm} = 32,90 N/mm² = f_{ck}+8
Valore medio della resistenza a trazione assiale del cls: f_{ctm} = 2,56 N/mm² = 0,3 · f_{ck}^(2/3)
Valore caratt. resistenza a trazione assiale (frattile 5%): f_{ctk, 0.05} = 1,79 N/mm² = 0,7 · f_{ctm}
Valore caratt. resistenza a trazione assiale (frattile 95%): f_{ctk, 0.95} = 3,33 N/mm² = 1,3 · f_{ctm}
Modulo di elasticità secante del calcestruzzo: E_{cm} = 31447,16 N/mm² = 22000 · [f_{cm}/10]^0,3
Deformazione Limite comportamento Elasto-Plastico: ε_{c2} = 0,002
Deformazione Ultima per il calcestruzzo: ε_{cu} = 0,0035
Resistenza di progetto a compressione del cls: f_{cd} = 14,11 N/mm² = α_{cc} · f_{ck} / γ_c
Resistenza di progetto a trazione del cls: f_{ctd} = 1,19 N/mm² = f_{ctk, 0.05} / γ_c

Acciaio

Classe dell'Acciaio: B450C

Resistenza a snervamento dell'Acciaio: f_{yk} = 450 N/mm²
Coefficiente di sicurezza parziale per l'acciaio: γ_s = 1,15
Modulo di Elasticità secante dell'Acciaio: E_s = 210000 N/mm²
Deformazione a snervamento dell'acciaio: ε_{yd} = 0,0019 f_{yd} / E_s
Deformazione Ultima nell'Acciaio: ε_{ud} = 0,011%
Resistenza di progetto a trazione dell'acciaio: f_{yd} = 391,30 N/mm² = f_{yk} / γ_s

Diagrammi

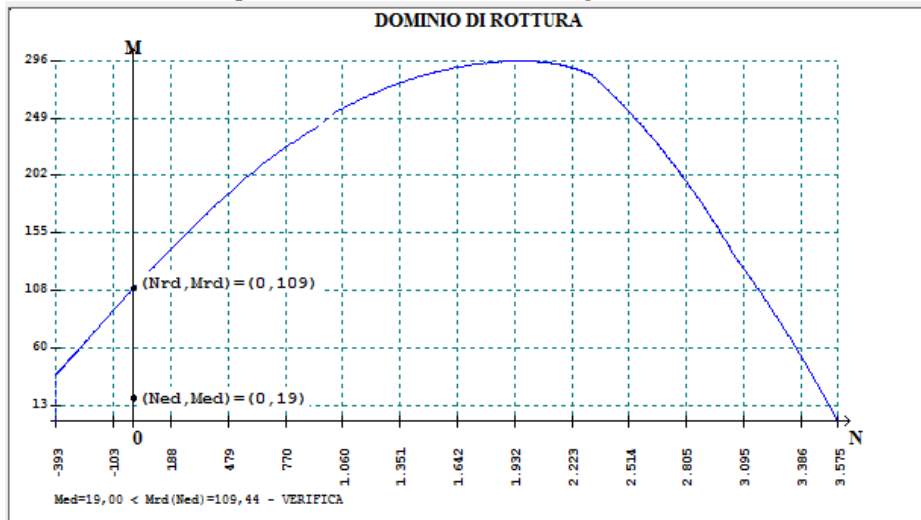
σ-ε per CLS: Parabola Rettangolo
σ-ε per Acciaio: Elastico perfettamente Plastico

Progetta Armature

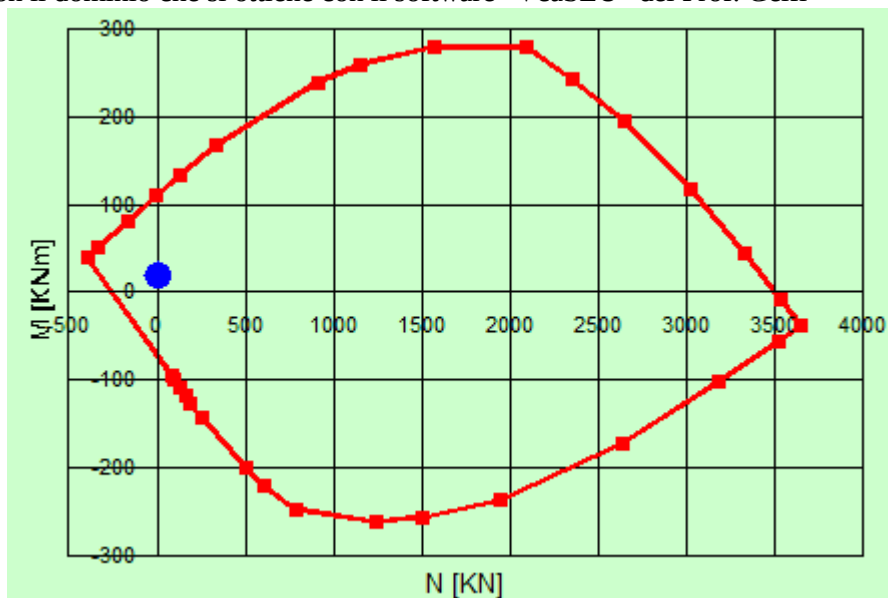
Registra Dati e Verifica

Esci

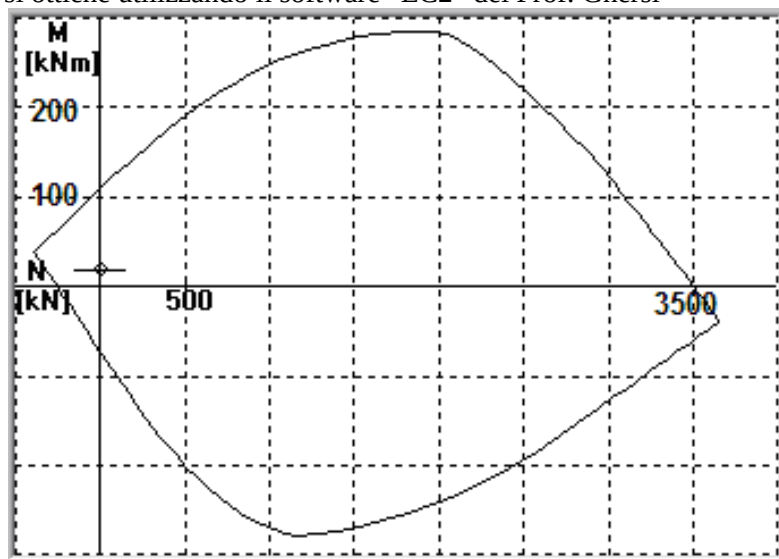
Utilizzando il metodo numerico sopra indicato si è ottenuto il seguente dominio:



Confrontabile con il dominio che si ottiene con il software “VcaSLU” del Prof. Gelfi



e con il dominio che si ottiene utilizzando il software “EC2” del Prof. Gherzi



9.5. SLU per Taglio

L'esame dello stato limite ultimo per taglio va effettuato tenendo conto che in generale alla sollecitazione di taglio si accompagna la sollecitazione per flessione e spesso anche per sforzo normale e torsione, la cui esatta valutazione è particolarmente complessa.

Inoltre, si precisa che il taglio dà origine nella sezione in c.a. sia a delle tensioni principali di compressione che di trazione.

In particolare, si osservi che fino a quando la tensione principale di trazione si mantiene al di sotto del valore di resistenza a trazione del cls. ($f_{ctd} = f_{ctk} / \gamma_c$), questa può essere assorbita integralmente dal cls; se invece la tensione di trazione supera la resistenza a trazione del cls. si verifica il fessurarsi della trave e pertanto è necessario disporre delle armature trasversali.

La determinazione di tali armature può essere effettuata utilizzando il modello teorico del “traliccio ideale resistente di Ritter-Morsh” costituito da aste incernierate nei nodi con un corrente superiore di cls compresso, una biella a 45° di cls. compresso, un'asta inclinata tesa ed un corrente inferiore di acciaio teso.

Secondo tale metodo si ha per tutta la trave un unico tipo di lesioni, inclinate di 45°

rispetto all'asse della trave e la forza di taglio esterna viene interamente portata dall'armatura trasversale.

In assenza di armatura trasversale, di conseguenza secondo tale modello la trave non può sopportare alcun incremento di carico al di là di quello di fessurazione.

In realtà, varie ricerche sperimentali hanno dimostrato che esistono altri meccanismi che contribuiscono a sopportare lo sforzo di taglio, e indicativamente vi è:

- Taglio portato dal corrente compresso di conglomerato

E' il taglio portato dalle tensioni tangenziali τ che si sviluppano nella zona di conglomerato compresso non fessurato.

- Taglio portato dalla biella d'anima

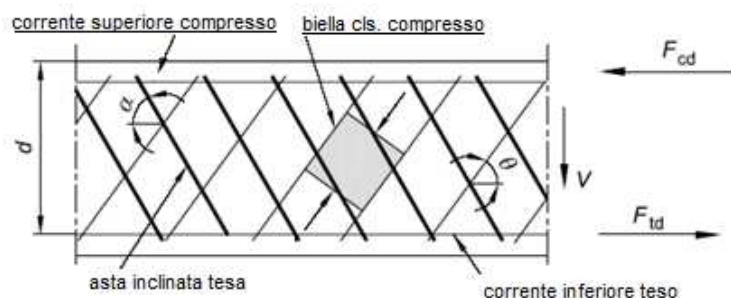
Un'altra aliquota del taglio esterno viene portata dalle stesse bielle di conglomerato compresso che si evidenziano tra due lesioni successive.

- Taglio portato per ingranamento degli inerti

Lungo la fessura la superficie del cls. non è perfettamente liscia, ma segue l'andamento degli inerti, per tale motivo quando nella fessura si ha uno scorrimento relativo, in ciascuna delle due facce di cls. si generano delle tensioni tangenziali e normali che danno luogo ad una componente verticale di taglio.

- Effetto Spinotto

Un'altra aliquota del taglio esterno viene portata per “effetto spinotto”, ossia mediante la resistenza a taglio offerta dall'armatura longitudinale che attraversa una fessura.



La verifica agli stati limite per Taglio viene quindi effettuata utilizzando delle formule empiriche, che si sono dimostrate più esatte di quelle ottenute con il criterio di Morsh, le quali comunque si basano sempre sulla schematizzazione a traliccio (art.4.1.2.1.3.2 DM. 14/01/2008), ma tengono conto degli effetti sopra indicati.

Si riportano di seguito le formule da verificare allo S.L.U. per taglio previste dalla normativa vigente D.M. 14/01/2008.

9.5.1. D.M. 2008 Art. 4.1.2.1.3 - Resistenza nei confronti di sollecitazioni taglienti

4.1.2.1.3.1 Elementi senza armature trasversali resistenti a taglio

È consentito l'impiego di solai, piastre e membrature a comportamento analogo, sprovviste di armature trasversali resistenti a taglio. La resistenza a taglio V_{Rd} di tali elementi deve essere valutata, utilizzando formule di comprovata affidabilità, sulla base della resistenza a trazione del calcestruzzo.

La verifica di resistenza (SLU) si pone con

$$V_{Rd} \geq V_{Ed} \quad (4.1.13)$$

dove V_{Ed} è il valore di calcolo dello sforzo di taglio agente.

Con riferimento all'elemento fessurato da momento flettente, la resistenza al taglio si valuta con

$$V_{RD} = \left\{ 0,18 \cdot k \cdot (100 \cdot \rho_1 \cdot f_{ck})^{1/3} / \gamma_c + 0,15 \cdot \sigma_{cp} \right\} \cdot b_w \cdot d \geq (v_{\min} + 0,15 \cdot \sigma_{cp}) \cdot b_w \cdot d \quad (4.1.14)$$

con

$$k = 1 + (200/d)^{1/2} \leq 2$$

$$v_{\min} = 0,035^{3/2} f_{ck}^{1/2}$$

e dove

d è l'altezza utile della sezione (in mm);

$\rho_1 = A_{sl}/(b_w \cdot d)$ è il rapporto geometrico di armatura longitudinale ($\leq 0,02$);

$\sigma_{cp} = N_{Ed}/A_c$ è la tensione media di compressione nella sezione ($\leq 0,2 f_{cd}$);

b_w è la larghezza minima della sezione (in mm).

Nel caso di elementi in cemento armato precompresso disposti in semplice appoggio, nelle zone non fessurate da momento flettente (con tensioni di trazione non superiori a f_{ctd}) la resistenza può valutarsi, in via semplificativa, con la formula:

$$V_{RD} = 0,7 \cdot b_w \cdot d \cdot (f_{ctd}^2 + \sigma_{cp} \cdot f_{ctd})^{1/2} \quad (4.1.15)$$

In presenza di significativi sforzi di trazione, la resistenza a taglio del calcestruzzo è da considerarsi nulla e, in tal caso, non è possibile adottare elementi sprovvisti di armatura trasversale.

Le armature longitudinali, oltre ad assorbire gli sforzi conseguenti alle sollecitazioni di flessione, devono assorbire quelli provocati dal taglio dovuti all'inclinazione delle fessure rispetto all'asse della trave, inclinazione assunta pari a 45° . In particolare, in corrispondenza degli appoggi, le armature longitudinali devono assorbire uno sforzo pari al taglio sull'appoggio.

4.1.2.1.3.2 Elementi con armature trasversali resistenti al taglio

La resistenza a taglio V_{Rd} di elementi strutturali dotati di specifica armatura a taglio deve essere valutata sulla base di una adeguata schematizzazione a traliccio. Gli elementi resistenti dell'ideale traliccio sono: le armature trasversali, le armature longitudinali, il corrente compresso di calcestruzzo e i puntoni d'anima inclinati. L'inclinazione θ dei puntoni di calcestruzzo rispetto all'asse della trave deve rispettare i limiti seguenti:

$$1 \leq \text{ctg } \theta \leq 2,5 \quad (4.1.16)$$

La verifica di resistenza (SLU) si pone con

$$V_{Rd} \geq V_{Ed} \quad (4.1.17)$$

dove V_{Ed} è il valore di calcolo dello sforzo di taglio agente.

Con riferimento all'armatura trasversale, la resistenza di calcolo a "taglio trazione" si calcola con:

$$V_{Rsd} = 0,9 \cdot d \cdot \frac{A_{sw}}{s} \cdot f_{yd} \cdot (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \theta) \cdot \sin \alpha \quad (4.1.18)$$

Con riferimento al calcestruzzo d'anima, la resistenza di calcolo a "taglio compressione" si calcola con

$$V_{Rcd} = 0,9 \cdot d \cdot b_w \cdot \alpha_c \cdot f'_{cd} \cdot (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \theta) / (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta) \quad (4.1.19)$$

La resistenza al taglio della trave è la minore delle due sopra definite:

$$V_{Rd} = \min (V_{Rsd}, V_{Rcd}) \quad (4.1.20)$$

dove

d , b_w e σ_{cp} hanno il significato già visto in § 4.1.2.1.3.1. e inoltre si è posto:

A_{sw} area dell'armatura trasversale;

s interasse tra due armature trasversali consecutive;

α angolo di inclinazione dell'armatura trasversale rispetto all'asse della trave;

f'_{cd} resistenza a compressione ridotta del calcestruzzo d'anima ($f'_{cd} = 0,5 \cdot f_{cd}$);

α_c coefficiente maggiorativo pari a

1	per membrane non compresse
$1 + \sigma_{cp}/f_{cd}$	per $0 \leq \sigma_{cp} < 0,25 f_{cd}$
1,25	per $0,25 f_{cd} \leq \sigma_{cp} \leq 0,5 f_{cd}$
$2,5(1 - \sigma_{cp}/f_{cd})$	per $0,5 f_{cd} < \sigma_{cp} < f_{cd}$

In presenza di significativo sforzo assiale, ad esempio conseguente alla precompressione, si dovrà aggiungere la limitazione:

$$(\operatorname{ctg} \theta_1 \leq \operatorname{ctg} \theta) \quad (4.1.21)$$

dove θ_1 è l'angolo di inclinazione della prima fessurazione ricavato da $\operatorname{ctg} \theta_1 = \tau / \sigma_1$ mentre τ e σ_1 sono rispettivamente la tensione tangenziale e la tensione principale di trazione sulla corda baricentrica della sezione intesa interamente reagente.

Le armature longitudinali, dimensionate in base alle sollecitazioni flessionali, dovranno essere prolungate di una misura pari a

$$a_1 = 0,9 \cdot d \cdot (\operatorname{ctg} \theta - \operatorname{ctg} \alpha) / 2 \geq 0 \quad (4.1.22)$$

Nel caso particolare di sezione rettangolare, se si dispongono le staffe solo verticalmente, essendo:

$$\theta = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \operatorname{ctg}(\theta) = 1$$

$$\alpha = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \operatorname{ctg}(\alpha) = 0$$

le formule sopra esposte possono risciversi:

Resistenza offerta dall'armatura a taglio:

$$V_{RD} = 0,9 \cdot d \cdot \frac{A_{sw}}{s} \cdot f_{yd}$$

Resistenza offerta dalle bielle di cls.

$$V_{Rcd} = 0,45 \cdot d \cdot b_w \cdot \alpha_c \cdot f'_{cd}$$

VERIFICA:

$$V_{Rd} = \min (V_{Rsd}, V_{Rcd}) \geq V_{Ed}$$

Inoltre, le armature longitudinali, dimensionate in base alle sollecitazioni flessionali, dovranno essere prolungate di una misura pari a

$$a_1 = 0,45 \cdot d$$

9.6. Stati Limite di Esercizio

Gli stati limite di esercizio da considerare in una struttura sono quelli derivanti da :

- deformazioni eccessive;
- fessurazione prematura o eccessiva;
- degrado o corrosione;
- spostamenti eccessivi;
- vibrazioni eccessive

a cui si riconducono le seguenti verifiche, come indicato al par. 4.1.2.2.1 del DM. 14/01/2008:

- verifiche di deformabilità;
- verifiche di vibrazione;
- verifiche di fessurazione;
- verifiche delle tensioni di esercizio;
- verifiche a fatica.

9.6.1. Stato Limite di Fessurazione

Come è noto, nelle verifiche delle sezioni in c.a. con il metodo delle tensioni ammissibili, si ipotizza che la resistenza a trazione del cls. sia nulla, ammettendo quindi che le stesse risultino completamente fessurate al di sotto dell'asse neutro ed affidando gli sforzi di trazione alle armature.

In realtà il cls. ha una piccola resistenza a trazione per cui, nelle sezioni in cui le tensioni di trazione si mantengono inferiori a tale valore, non si ha fessurazione ed il cls. collabora all'assorbimento dello sforzo di trazione.

Nelle zone in cui invece le sollecitazioni sono tali da avere una tensione di trazione nel cls. superiore al valore della resistenza a trazione dello stesso, si riscontrano sia sezioni fessurate (in cui lo sforzo di trazione resta affidato esclusivamente all'acciaio) sia sezioni integre, comprese tra due fessure successive (in cui il cls. riesce a collaborare all'assorbimento dello sforzo di trazione).

Osserviamo dunque che, se abbiamo una trave in c.a., per eliminare completamente le fessure dovremmo far lavorare il cls. con valori delle tensioni di trazione inferiori alla resistenza a trazione dello stesso, il che comporta valori modestissimi per le tensioni cui è soggetto l'acciaio; avremmo cioè una trave fortemente antieconomica.

La presenza di azioni più o meno capillari deve essere pertanto considerata come ovvia conseguenza delle condizioni di lavoro dei due materiali (cls. e acciaio) che coesistono nella struttura , e non deve automaticamente dar luogo a valutazioni negative circa la qualità dei getti o l'esecuzione delle opere.

Ovviamente, quadri fessurativi eccessivi e diffusi sono certamente da evitare in quanto possono risultare incompatibili con le esigenze funzionali, estetiche e di durabilità della struttura.

Come indicato nella normativa al par. 4.1.2.2.4 , per assicurare la funzionalità e la durata della struttura è necessario:

- realizzare un sufficiente ricoprimento delle armature con calcestruzzo di buona qualità e compattezza, bassa porosità e bassa permeabilità;
- non superare uno stato limite di fessurazione adeguato alle condizioni ambientali, alle sollecitazioni ed alla sensibilità delle armature alla corrosione;
- tener conto delle esigenze estetiche.

9.6.1.1. Stato Limite di Apertura delle Fessure

Come definito all'art. 4.1.2.2.4.1 del D.M. 14/01/2008, gli stati limite di esercizio relativi alla fessurazione sono tre:

- stato limite di decompressione;
- stato limite di formazione delle fessure;
- stato limite di apertura delle fessure.

Come definito nella Tabella 4.1.IV della suddetta normativa, vari sono i fattori che influenzano la scelta dello stato limite da considerare: Condizioni ambientali, Combinazione di Azioni, Tipo di armatura:

Tabella 4.1.IV – Criteri di scelta dello stato limite di fessurazione

Gruppi di esigenze	Condizioni ambientali	Combinazione di azioni	Armatura			
			Sensibile		Poco sensibile	
			Stato limite	w_d	Stato limite	w_d
a	Ordinarie	frequente	ap. fessure	$\leq w_2$	ap. fessure	$\leq w_3$
		quasi permanente	ap. fessure	$\leq w_1$	ap. fessure	$\leq w_2$
b	Aggressive	frequente	ap. fessure	$\leq w_1$	ap. fessure	$\leq w_2$
		quasi permanente	decompressione	-	ap. fessure	$\leq w_1$
c	Molto aggressive	frequente	formazione fessure	-	ap. fessure	$\leq w_1$
		quasi permanente	decompressione	-	ap. fessure	$\leq w_1$

La verifica relativa allo stato limite di apertura delle fessure, viene eseguita per la combinazione di azioni prescelta, controllando che il valore di calcolo di apertura delle fessure (w_d) non sia superiore al valore limite di apertura della fessura calcolato al livello considerato è pari ad uno dei seguenti valori nominali:

$$w_1 = 0,2 \text{ mm}$$

$$w_2 = 0,3 \text{ mm}$$

$$w_3 = 0,4 \text{ mm}$$

Il valore di calcolo è dato da:

$$w_d = 1,7 w_m$$

dove w_m , rappresenta l'ampiezza media delle fessure.

L'ampiezza media delle fessure w_m è calcolata come prodotto della deformazione media delle barre d'armatura ϵ_{sm} per la distanza media tra le fessure Δ_{sm} :

$$w_m = \epsilon_{sm} \Delta_{sm}$$

Come indicato al punto C.4.1.2.2.4 della Circolare 20 febbraio 2009 n.617 C.S.LL.PP., "Istruzioni per l'applicazione delle «Nuove norme tecniche per le costruzioni» di cui al decreto ministeriale 14 gennaio

2008.” la deformazione media delle barre e la distanza media tra le fessure possono essere valutate utilizzando la procedura indicata del D.M. 9 gennaio 1996.

Detta $A_{c,eff}$ l'area di calcestruzzo entro la quale la barra di acciaio può effettivamente influenzare l'apertura della fessura. Si può ritenere, per una singola barra, che l'area efficace abbia forma circolare con diametro pari a 14 volte il diametro della barra. Applicando tale concetto ai casi usuali di sezioni inflesse e tese si può porre $A_{c,eff} = b_{eff} \cdot d_{eff}$ in cui i valori da attribuire a b_{eff} ed a d_{eff} sono indicati nella figura 4.

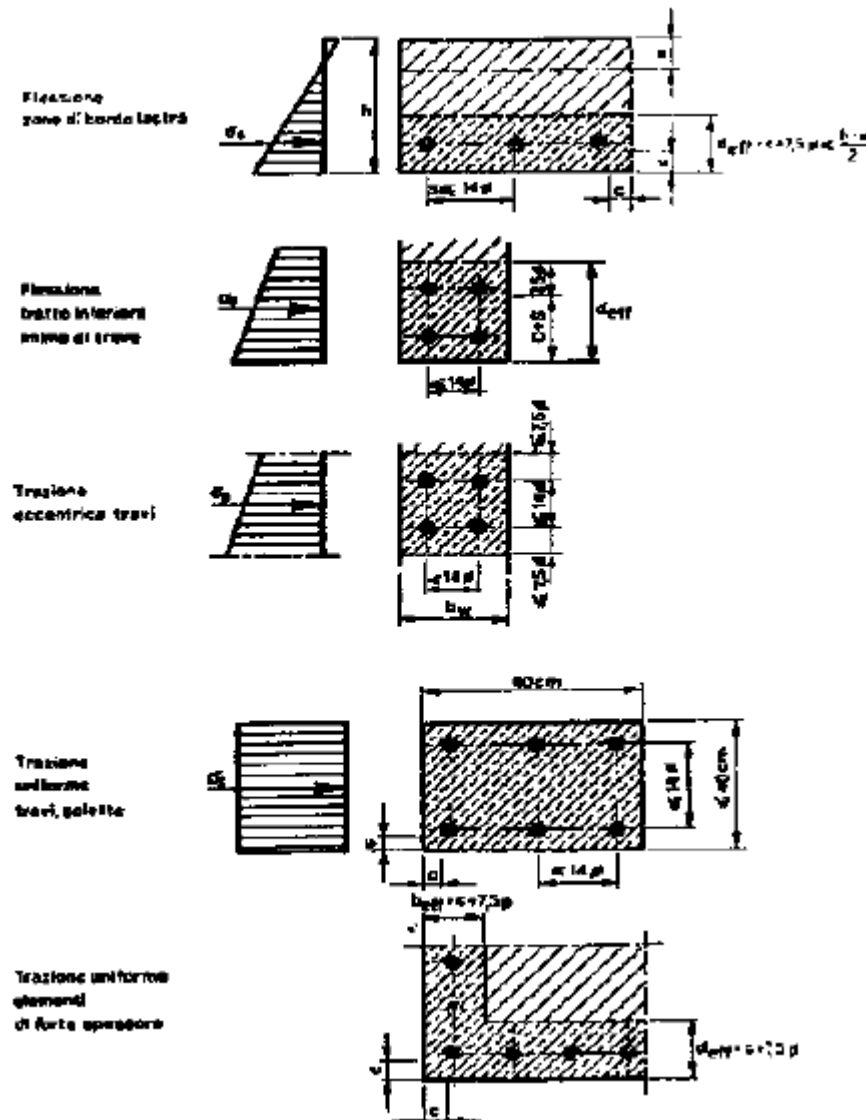


Fig. 4 - Area efficace

Il valore w_k calcolato si riferisce all'apertura della fessura misurata sulla superficie del calcestruzzo all'interno dell'area di efficacia dell'armatura; al di fuori di tale area le fessure possono allargarsi, e la loro ammissibilità dipende dalle esigenze estetiche. Se tali più ampie fessure non sono ammissibili, occorre predisporre ulteriori armature.

In assenza di dati più precisi i parametri Δ_{sm} e ϵ_{sm} che definiscono w_m e w_k possono valutarsi come segue, nell'ipotesi che le armature siano distribuite uniformemente sull'area efficace della sezione trasversale.

a) La distanza media fra le fessure per la condizione di fessurazione stabilizzata in corrispondenza del livello baricentrico dell'armatura all'interno dell'area efficace è data da:

$$\Delta_{sm} = 2 \left(c + \frac{s}{10} \right) + k_2 k_3 \frac{\Phi}{\rho_r}$$

in cui:

c = ricoprimento dell'armatura

s = distanza fra le barre; se $s \leq 14 f$ si adotterà $s = 14 f$

Φ = diametro della barra

k2 = coefficiente che caratterizza l'aderenza del calcestruzzo alla barra e al quale si assegnano i seguenti valori:

0,4 per barre ad aderenza migliorata

0,8 per barre lisce

k3 = coefficiente che tiene conto della forma del diagramma delle tensioni prima della fessurazione in base al seguente prospetto:

0,125 nel caso di diagramma triangolare di flessione o pressoflessione

0,250 nel caso di trazione pura

$0,25(\sigma_1 + \sigma_2)/2$ nel caso di trazione eccentrica o nel caso in cui si consideri una sola parte della sezione

σ_1, σ_2 = trazione nel calcestruzzo teso

$$\rho_r = \frac{A_s}{A_{c, eff}}$$

A_s = area della sezione di acciaio posta nell'area $A_{c, eff}$.

b) La deformazione unitaria media dell'armatura ε_{sm} può valutarsi secondo la seguente espressione che tiene conto della collaborazione del calcestruzzo teso che la circonda:

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left[1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_2} \right)^2 \right] \geq 0,4 \left(\frac{\sigma_s}{E_s} \right)$$

in cui:

σ_s = tensione dell'acciaio calcolata nella sezione fessurata per la combinazione di azioni considerata

σ_{sr} = tensione nell'acciaio calcolata nella sezione fessurata per la sollecitazione corrispondente al raggiungimento della resistenza a trazione f_{ctm} nella fibra di calcestruzzo più sollecitata in sezione interamente reagente, compresa nell'area efficace;

β_1 = coefficiente rappresentativo dell'aderenza acciaio calcestruzzo che assume i valori:

1,0 nel caso di barre ad aderenza migliorata

0,5 nel caso di barre lisce

β_2 = coefficiente che tiene conto delle condizioni di sollecitazione:

1,0 nel caso della prima applicazione di una azione di breve durata;

0,5 nel caso di azioni di lunga durata o nel caso di azioni ripetute.

Le relazioni precedenti s_{rm} e ε_{sm} possono essere usate per calcolare l'ampiezza delle fessure anche prima della stabilizzazione della fessurazione.

Esempio

Geometria Sezione

B	1000 mm		
H	200 mm		
c	30 mm		
h	170 mm		
As	769,69 mm ²	5 f 14	Armatatura Tesa
A's	769,6902 mm ²	5 f 14	Armatatura compressa
s	196 mm	distanza fra le barre	
Ec	31447,16 N/mm ²		
Es	210000 N/mm ²		
Ect	18868,3 N/mm ²		
fcd	11,76 N/mm ²	resistenza a compressione cls	
fctd	1,06 N/mm ²	resistenza a trazione cls	
fctm	2,27 N/mm ²	resistenza a trazione assiale cls	
n	6,677869		Es/Ec
n'	11,12978		Es/Ect
nct	0,6		n/n'
M	19,12 kNm	Momento Flettente agente	

Stadio I - Sezione di incipiente fessurazione

Posizione Asse neutro lembo superiore	xpf =	88,08796127 mm	
Momento Statico Sez. Reag. Rispetto asse n.	Sn =	0	
Momento Inerzia Sez. Reag. Rispetto asse n.	Jn =	559992862,7	
Tensione CLS -	σc =	3,01 N/mm ²	M*xpf/Jn
Tensione armatura tesa	σs =	18,68 N/mm ²	nc*sc*(h-xpf)/xpf

Stadio 2 - Sezione Fessurata (sollecitazioni effettive)

Posizione Asse neutro lembo superiore	xn =	48,68200402 mm	
Momento Statico Sez. Reag. Rispetto asse n.	Sn =	0	
Momento Inerzia Sez. Reag. Rispetto asse n.	Jn =	212412450,6	
Tensione CLS -	σc =	4,38 N/mm ²	M*xpf/Jn
Tensione acciaio - corrispondente fctm	σsr =	163,80 N/mm ²	n*sc*(H-xn)/xn

Verifica Ampiezza Fessura

Valore limite	Wi =	0,4 mm	
Coefficiente aderenza cls	k2 =	0,4	
Coefficiente diagramma tensioni	k3 =	0,125	
Coefficiente Aderenza acciaio	b1 =	1	
Coefficiente azioni	b2 =	0,5	
Altezza efficace	hc,ef =	60,659	
Area efficace	Ac,ef =	60659,00 mm ²	
Rapporto geometrico Area Efficace	ρr =	0,01269	
Diametro equivalente Barre acciaio	F =	14	
Distanza media fessure	Δsm =	154,367 mm	
Deformazione unitaria	εsm =	0,000775	
Ampiezza Fessura	Wd =	0,203 mm	VERIFICA

9.6.2. **DM 2008 art.4.1.2.2.4.1 - Definizione degli Stati Limite di fessurazione**

In ordine di severità decrescente si distinguono i seguenti stati limite:

- d) stato limite di decompressione nel quale, per la combinazione di azioni prescelta, la tensione normale è ovunque di compressione ed al più uguale a 0;
- e) stato limite di formazione delle fessure, nel quale, per la combinazione di azioni prescelta, la tensione normale di trazione nella fibra più sollecitata è:

$$\sigma = \frac{f_{ctm}}{1,2}$$

dove f_{ctm} è definito nel § 11.2.10.2;

11.2.10.2 Resistenza a trazione

La resistenza a trazione del calcestruzzo può essere determinata a mezzo di diretta sperimentazione, condotta su provini appositamente confezionati, secondo la norma UNI EN 12390-2:2002, per mezzo delle prove di seguito indicate:

- prove di trazione diretta;
- prove di trazione indiretta: (secondo UNI EN 12390-6:2002 o metodo dimostrato equivalente);
- prove di trazione per flessione: (secondo UNI EN 12390-5:2002 o metodo dimostrato equivalente).

In sede di progettazione si può assumere come resistenza media a trazione semplice (assiale) del calcestruzzo il valore (in N/mm²):

$$f_{ctm} = 0,30 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad \text{per classi} \leq C50/60 \quad (11.2.3a)$$

$$f_{ctm} = 2,12 \cdot \ln[1 + f_{cm}/10] \quad \text{per classi} > C50/60 \quad (11.2.3b)$$

I valori caratteristici corrispondenti ai frattili 5% e 95% sono assunti, rispettivamente, pari a $0,7 f_{ctm}$, ed $1,3 f_{ctm}$.

Il valore medio della resistenza a trazione per flessione è assunto, in mancanza di sperimentazione diretta, pari a:

$$f_{ctm} = 1, 2 f_{ctm} \quad (11.2.4)$$

- f) stato limite di apertura delle fessure, nel quale, per la combinazione di azioni prescelta, il valore limite di apertura della fessura calcolato al livello considerato è pari ad uno dei seguenti valori nominali:

$$w_1 = 0,2 \text{ mm} \quad w_2 = 0,3 \text{ mm} \quad w_3 = 0,4 \text{ mm}$$

Lo stato limite di fessurazione deve essere fissato in funzione delle condizioni ambientali e della sensibilità delle armature alla corrosione, come descritto nel seguito.

4.1.2.2.4.2 Combinazioni di azioni

Si prendono in considerazione le seguenti combinazioni:

- combinazioni quasi permanenti;
- combinazioni frequenti.

4.1.2.2.4.3 Condizioni ambientali

Le condizioni ambientali, ai fini della protezione contro la corrosione delle armature metalliche, possono essere suddivise in ordinarie, aggressive e molto aggressive in relazione a quanto indicato nella Tab. 4.1.III con riferimento alle classi di esposizione definite nelle Linee Guida per il calcestruzzo strutturale emesse dal Servizio Tecnico Centrale del Consiglio Superiore dei Lavori Pubblici.

Tabella 4.1.III – Descrizione delle condizioni ambientali

CONDIZIONI AMBIENTALI	CLASSE DI ESPOSIZIONE
Ordinarie	X0, XC1, XC2, XC3, XF1
Aggressive	XC4, XD1, XS1, XA1, XA2, XF2, XF3
Molto aggressive	XD2, XD3, XS2, XS3, XA3, XF4

Table 4.1: Exposure classes related to environmental conditions in accordance with EN 206-1

Class designation	Description of the environment	Informative examples where exposure classes may occur
1 No risk of corrosion or attack		
X0	For concrete without reinforcement or embedded metal: all exposures except where there is freeze/thaw, abrasion or chemical attack For concrete with reinforcement or embedded metal: very dry	Concrete inside buildings with very low air humidity
2 Corrosion induced by carbonation		
XC1	Dry or permanently wet	Concrete inside buildings with low air humidity Concrete permanently submerged in water
XC2	Wet, rarely dry	Concrete surfaces subject to long-term water contact Many foundations
XC3	Moderate humidity	Concrete inside buildings with moderate or high air humidity External concrete sheltered from rain
XC4	Cyclic wet and dry	Concrete surfaces subject to water contact, not within exposure class XC2
3 Corrosion induced by chlorides		
XD1	Moderate humidity	Concrete surfaces exposed to airborne chlorides
XD2	Wet, rarely dry	Swimming pools Concrete components exposed to industrial waters containing chlorides
XD3	Cyclic wet and dry	Parts of bridges exposed to spray containing chlorides Pavements Car park slabs
4 Corrosion induced by chlorides from sea water		
XS1	Exposed to airborne salt but not in direct contact with sea water	Structures near to or on the coast
XS2	Permanently submerged	Parts of marine structures
XS3	Tidal, splash and spray zones	Parts of marine structures
5 Freeze/Thaw Attack		
XF1	Moderate water saturation, without de-icing agent	Vertical concrete surfaces exposed to rain and freezing
XF2	Moderate water saturation, with de-icing agent	Vertical concrete surfaces of road structures exposed to freezing and airborne de-icing agents
XF3	High water saturation, without de-icing agents	Horizontal concrete surfaces exposed to rain and freezing
XF4	High water saturation with de-icing agents or sea water	Road and bridge decks exposed to de-icing agents Concrete surfaces exposed to direct spray containing de-icing agents and freezing Splash zone of marine structures exposed to freezing
6. Chemical attack		
XA1	Slightly aggressive chemical environment according to EN 206-1, Table 2	Natural soils and ground water
XA2	Moderately aggressive chemical environment according to EN 206-1, Table 2	Natural soils and ground water
XA3	Highly aggressive chemical environment according to EN 206-1, Table 2	Natural soils and ground water

4.1.2.2.4.4 Sensibilità delle armature alla corrosione

Le armature si distinguono in due gruppi:

- armature sensibili;
- armature poco sensibili.

Appartengono al primo gruppo gli acciai da precompresso.

Appartengono al secondo gruppo gli acciai ordinari.

Per gli acciai zincati e per quelli inossidabili si può tener conto della loro minor sensibilità alla corrosione.

4.1.2.2.4.5 Scelta degli stati limite di fessurazione

Nella Tab. 4.1.IV sono indicati i criteri di scelta dello stato limite di fessurazione con riferimento alle esigenze sopra riportate.

Tabella 4.1.IV – Criteri di scelta dello stato limite di fessurazione

Gruppi di esigenze	Condizioni ambientali	Combinazione di azioni	Armatura			
			Sensibile		Poco sensibile	
			Stato limite	w_d	Stato limite	w_d
a	Ordinarie	frequente	ap. fessure	$\leq w_2$	ap. fessure	$\leq w_3$
		quasi permanente	ap. fessure	$\leq w_1$	ap. fessure	$\leq w_2$
b	Aggressive	frequente	ap. fessure	$\leq w_1$	ap. fessure	$\leq w_2$
		quasi permanente	decompressione	-	ap. fessure	$\leq w_1$
c	Molto aggressive	frequente	formazione fessure	-	ap. fessure	$\leq w_1$
		quasi permanente	decompressione	-	ap. fessure	$\leq w_1$

w_1 , w_2 , w_3 sono definiti al § 4.1.2.2.4.1, il valore di calcolo w_d , è definito al § 4.1.2.2.4.6.

4.1.2.2.4.6 Verifica allo stato limite di fessurazione

Stato limite di decompressione e di formazione delle fessure.

Le tensioni sono calcolate in base alle caratteristiche geometriche e meccaniche della sezione omogeneizzata non fessurata.

Stato limite di apertura delle fessure

Il valore di calcolo di apertura delle fessure (w_d) non deve superare i valori nominali w_1 , w_2 , w_3 secondo quanto riportato nella Tab. 4.1.IV.

Il valore di calcolo è dato da:

$$w_d = 1,7 w_m \quad (4.1.38)$$

dove w_m , rappresenta l'ampiezza media delle fessure.

L'ampiezza media delle fessure w_m è calcolata come prodotto della deformazione media delle barre d'armatura ϵ_{sm} per la distanza media tra le fessure Δ_{sm} :

$$w_m = \epsilon_{sm} \Delta_{sm} \quad (4.1.39)$$

Per il calcolo di ϵ_{sm} , e Δ_{sm} vanno utilizzati criteri consolidati riportati nella letteratura tecnica.

La verifica dell'ampiezza di fessurazione può anche essere condotta senza calcolo diretto, limitando la tensione di trazione nell'armatura, valutata nella sezione parzializzata per la

combinazione di carico pertinente, ad un massimo correlato al diametro delle barre ed alla loro spaziatura.

9.6.3. DM.2008 art. 4.1.2.2.5 - Verifica delle tensioni di esercizio

Valutate le azioni interne nelle varie parti della struttura, dovute alle combinazioni caratteristica e quasi permanente delle azioni, si calcolano le massime tensioni sia nel calcestruzzo sia nelle armature; si deve verificare che tali tensioni siano inferiori ai massimi valori consentiti di seguito riportati.

4.1.2.2.5.1 Tensione massima di compressione del calcestruzzo nelle condizioni di esercizio

La massima tensione di compressione del calcestruzzo σ_c , deve rispettare la limitazione seguente:

$$\sigma_c < 0,60 f_{ck} \text{ per combinazione caratteristica (rara)} \quad (4.1.40)$$

$$\sigma_c < 0,45 f_{ck} \text{ per combinazione quasi permanente.} \quad (4.1.41)$$

Nel caso di elementi piani (solette, pareti, ...) gettati in opera con calcestruzzi ordinari e con spessori di calcestruzzo minori di 50 mm i valori limite sopra scritti vanno ridotti del 20%.

4.1.2.2.5.2 Tensione massima dell'acciaio in condizioni di esercizio

Per l'acciaio avente caratteristiche corrispondenti a quanto indicato al Cap. 11, la tensione massima, σ_s , per effetto delle azioni dovute alla combinazione caratteristica deve rispettare la limitazione seguente:

$$\sigma_s < 0,8 f_{yk}. \quad (4.1.42)$$

10. D.M. 2008 Art. 7.4.6.1 - Limitazioni geometriche

7.4.6.1.1 Travi

La larghezza b della trave deve essere ≥ 20 cm e, per le travi basse comunemente denominate “a spessore”, deve essere non maggiore della larghezza del pilastro, aumentata da ogni lato di metà dell'altezza della sezione trasversale della trave stessa, risultando comunque non maggiore di due volte b_c , essendo b_c la larghezza del pilastro ortogonale all'asse della trave.

Il rapporto b/h tra larghezza e altezza della trave deve essere $\geq 0,25$.

Non deve esserci eccentricità tra l'asse delle travi che sostengono pilastri in falso e l'asse dei pilastri che le sostengono. Esse devono avere almeno due supporti, costituiti da pilastri o pareti. Le pareti non possono appoggiarsi in falso su travi o solette.

Le zone critiche si estendono, per CD”B” e CD”A”, per una lunghezza pari rispettivamente a 1 e 1,5 volte l'altezza della sezione della trave, misurata a partire dalla faccia del nodo trave-pilastro o da entrambi i lati a partire dalla sezione di prima plasticizzazione. Per travi che sostengono un pilastro in falso, si assume una lunghezza pari a 2 volte l'altezza della sezione misurata da entrambe le facce del pilastro.

7.4.6.1.2 Pilastri

La dimensione minima della sezione trasversale non deve essere inferiore a 250 mm.

Se θ , quale definito nel § 7.3.1, risulta $>0,1$, l'altezza della sezione non deve essere inferiore ad un decimo della maggiore tra le distanze tra il punto in cui si annulla il momento flettente e le estremità del pilastro.

In assenza di analisi più accurate si può assumere che la lunghezza della zona critica sia la maggiore tra: l'altezza della sezione, 1/6 dell'altezza libera del pilastro, 45 cm, l'altezza libera del pilastro se questa è inferiore a 3 volte l'altezza della sezione.

11. D.M. 2008 Art.4.1.6.1 - Armatura elementi monodimensionali (Travi , Pilastri)

4.1.6.1.1 Armatura delle travi

L'area dell'armatura longitudinale in zona tesa non deve essere inferiore a

$$A_{s,min} = 0,26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b_t \cdot d \quad ; \quad A_{s,min} \geq 0,0013 \cdot b_t \cdot d \quad (4.1.43)$$

dove:

b_t rappresenta la larghezza media della zona tesa; per una trave a T con piattabanda compressa, nel calcolare il valore di b_t si considera solo la larghezza dell'anima;

d è l'altezza utile della sezione;

f_{ctm} è il valore medio della resistenza a trazione assiale definita nel § 11.2.10.2;

f_{yk} è il valore caratteristico della resistenza a trazione dell'armatura ordinaria.

Negli appoggi di estremità all'intradosso deve essere disposta un'armatura efficacemente ancorata, calcolata per uno sforzo di trazione pari al taglio.

Al di fuori delle zone di sovrapposizione, l'area di armatura tesa o compressa non deve superare individualmente $A_{s,max} = 0,04 A_c$, essendo A_c l'area della sezione trasversale di calcestruzzo.

Le travi devono prevedere armatura trasversale costituita da staffe con sezione complessiva non inferiore ad $A_{st} = 1,5 b$ mm²/m essendo b lo spessore minimo dell'anima in millimetri, con un minimo di tre staffe al metro e comunque passo non superiore a 0,8 volte l'altezza utile della sezione.

In ogni caso almeno il 50% dell'armatura necessaria per il taglio deve essere costituita da staffe.

4.1.6.1.2 Armatura dei pilastri

Nel caso di elementi sottoposti a prevalente sforzo normale, le barre parallele all'asse devono avere diametro maggiore od uguale a 12 mm e non potranno avere interassi maggiori di 300 mm. Inoltre la loro area non deve essere inferiore a

$$A_{s,min} = 0,10 \cdot N_{ED} \cdot f_{yd} \quad (4.1.44)$$

dove:

f_{yd} è la resistenza di calcolo dell'armatura (riferita allo snervamento)

N_{Ed} è la forza di compressione assiale di calcolo

A_c è l'area di calcestruzzo.

Le armature trasversali devono essere poste ad interasse non maggiore di 12 volte il diametro minimo delle barre impiegate per l'armatura longitudinale, con un massimo di 250 mm. Il diametro delle staffe non deve essere minore di 6 mm e di $\frac{1}{4}$ del diametro massimo delle barre longitudinali.

Al di fuori delle zone di sovrapposizione, l'area di armatura non deve superare $A_{s,max} = 0,04 A_c$, essendo A_c l'area della sezione trasversale di calcestruzzo.

12. D.M. 2008 Art.7.4.6.2 - Limitazioni di Armatura

7.4.6.2.1 Travi

Armature longitudinali

Almeno due barre di diametro non inferiore a 14 mm devono essere presenti superiormente e inferiormente per tutta la lunghezza della trave.

In ogni sezione della trave, salvo giustificazioni che dimostrino che le modalità di collasso della sezione sono coerenti con la classe di duttilità adottata, il rapporto geometrico ρ relativo all'armatura tesa, indipendentemente dal fatto che l'armatura tesa sia quella al lembo superiore della sezione A_s o quella al lembo inferiore della sezione A_i , deve essere compreso entro i seguenti limiti:

$$\frac{1,4}{f_{yk}} \leq \rho \leq \rho_{com} + \frac{3,5}{f_{yk}} \quad (7.4.25)$$

dove:

ρ è il rapporto geometrico relativo all'armatura tesa pari ad $A_s/(b \cdot h)$ oppure ad $A_i/(b \cdot h)$;

ρ_{comp} è il rapporto geometrico relativo all'armatura compressa;

f_{yk} è la tensione caratteristica di snervamento dell'acciaio (in MPa).

Nelle zone critiche della trave, inoltre, deve essere $\rho_{comp} \geq 1/2 \rho$ e comunque $\geq 0,25 \rho$.

L'armatura superiore, disposta per il momento negativo alle estremità delle travi, deve essere contenuta, per almeno il 75%, entro la larghezza dell'anima e comunque, per le sezioni a T o ad L, entro una fascia di soletta pari rispettivamente alla larghezza del pilastro, od alla larghezza del pilastro aumentata di 2 volte lo spessore della soletta da ciascun lato del pilastro, a seconda che nel nodo manchi o sia presente una trave ortogonale. Almeno $1/4$ della suddetta armatura deve essere mantenuta per tutta la lunghezza della trave.

Le armature longitudinali delle travi, sia superiori che inferiori, devono attraversare, di regola, i nodi senza ancorarsi o giuntarsi per sovrapposizione in essi. Quando ciò non risulti possibile, sono da rispettare le seguenti prescrizioni:

- le barre vanno ancorate oltre la faccia opposta a quella di intersezione con il nodo, oppure rivoltate verticalmente in corrispondenza di tale faccia, a contenimento del nodo;
- la lunghezza di ancoraggio delle armature tese va calcolata in modo da sviluppare una tensione nelle barre pari a $1,25 f_{yk}$, e misurata a partire da una distanza pari a 6 diametri dalla faccia del pilastro verso l'interno.

La parte dell'armatura longitudinale della trave che si ancora oltre il nodo non può terminare all'interno di una zona critica, ma deve ancorarsi oltre di essa.

La parte dell'armatura longitudinale della trave che si ancora nel nodo, deve essere collocata all'interno delle staffe del pilastro. Per prevenire lo sfilamento di queste armature il diametro delle barre non inclinate deve essere $\leq \alpha_{bL}$ volte l'altezza della sezione del pilastro, essendo

$$\alpha_{bL} = \begin{cases} \frac{7,5 \cdot f_{ctm}}{\gamma_{Rd} \cdot f_{yd}} \cdot \frac{1 + 0,8 v_d}{1 + 0,75 k_D \cdot \rho_{comp} / \rho} & \text{per nodi interni} \\ \frac{7,5 \cdot f_{ctm}}{\gamma_{Rd} \cdot f_{yd}} \cdot (1 + 0,8 v_d) & \text{per nodi esterni} \end{cases}$$

dove:

v_d è la forza assiale di progetto normalizzata;

k_D vale 1 o 2/3, rispettivamente per CD"A" e per CD"B";

γ_{Rd} vale 1,2 o 1, rispettivamente per CD"A" e per CD"B".

Se per nodi esterni non è possibile soddisfare tale limitazione, si può prolungare la trave oltre il pilastro, si possono usare piastre saldate alla fine delle barre, si possono piegare le barre per una lunghezza minima pari a 10 volte il loro diametro disponendo un'apposita armatura trasversale dietro la piegatura.

Armature trasversali

Nelle zone critiche devono essere previste staffe di contenimento. La prima staffa di contenimento deve distare non più di 5 cm dalla sezione a filo pilastro; le successive devono essere disposte ad un passo non superiore alla minore tra le grandezze seguenti:

- un quarto dell'altezza utile della sezione trasversale;
- 175 mm e 225 mm, rispettivamente per CD"A" e CD "B";
- 6 volte e 8 volte il diametro minimo delle barre longitudinali considerate ai fini delle verifiche, rispettivamente per CD"A" e CD "B"
- 24 volte il diametro delle armature trasversali.

Per staffa di contenimento si intende una staffa rettangolare, circolare o a spirale, di diametro minimo 6 mm, con ganci a 135° prolungati per almeno 10 diametri alle due estremità. I ganci devono essere assicurati alle barre longitudinali.

7.4.6.2.2 Pilastri

Nel caso in cui i tamponamenti non si estendano per l'intera altezza dei pilastri adiacenti, l'armatura risultante deve essere estesa per una distanza pari alla profondità del pilastro oltre la zona priva di tamponamento. Nel caso in cui l'altezza della zona priva di tamponamento fosse inferiore a 1,5 volte la profondità del pilastro, debbono essere utilizzate armature bi-diagonali.

Nel caso precedente, qualora il tamponamento sia presente su un solo lato di un pilastro, l'armatura trasversale da disporre alle estremità del pilastro ai sensi del § 7.4.5.3. deve essere estesa all'intera altezza del pilastro.

Armature longitudinali

Per tutta la lunghezza del pilastro l'interasse tra le barre non deve essere superiore a 25 cm.

Nella sezione corrente del pilastro, la percentuale geometrica ρ di armatura longitudinale, con ρ rapporto tra l'area dell'armatura longitudinale e l'area della sezione del pilastro, deve essere compresa entro i seguenti limiti:

$$1\% \leq \rho \leq 4\% \quad (7.4.27)$$

Se sotto l'azione del sisma la forza assiale su un pilastro è di trazione, la lunghezza di ancoraggio delle barre longitudinali deve essere incrementata del 50%.

Armature trasversali

Nelle zone critiche devono essere rispettate le condizioni seguenti: le barre disposte sugli angoli della sezione devono essere contenute dalle staffe; almeno una barra ogni due, di quelle disposte sui lati, deve essere trattenuta da staffe interne o da legature; le barre non fissate devono trovarsi a meno di 15 cm e 20 cm da una barra fissata, rispettivamente per CD"A" e CD"B".

Il diametro delle staffe di contenimento e legature deve essere non inferiore a 6 mm ed il loro passo deve essere non superiore alla più piccola delle quantità seguenti:

- 1/3 e 1/2 del lato minore della sezione trasversale, rispettivamente per CD"A" e CD"B";
- 125 mm e 175 mm, rispettivamente per CD"A" e CD"B";
- 6 e 8 volte il diametro delle barre longitudinali che collegano, rispettivamente per CD"A" e CD"B".

Si devono disporre staffe in un quantitativo minimo non inferiore a

$$\frac{A_{st}}{s} \geq \begin{cases} 0,08 \frac{f_{cd} \cdot b_{st}}{f_{yd}} & \text{per CD "A" al di fuori della zona critica e per CD "B"} \\ 0,12 \frac{f_{cd} \cdot b_{st}}{f_{yd}} & \text{per CD "A"} \end{cases} \quad (7.4.28)$$

in cui A_{st} è l'area complessiva dei bracci delle staffe, b_{st} è la distanza tra i bracci più esterni delle staffe ed s è il passo delle staffe.

13. Routine Visual Basic – Metodo Numerico Mario Zafonte

```
Public Sub CalcolaNMDominioSezRett(Direz As String, Procedi As Boolean, msg As String)
    'calcola i valori di N ed M al variare di xn
    'per le varie regioni
    '....
    'DN : Incremento di xn nelle varie regioni in cui verranno calcolati Nrd ed Mrd
    'DX : Porzione infinitesima della sezione in cui calcolare sigma(x) al variare di x tra 0 e xn
    '      per il calcolo degli integrali approssimati
    '....

    Dim eps1 As Double, eps As Double, sigmaSup As Double, sigmaInf As Double, sigmaX As Double
    Dim bX As Double
    Dim xx As Double, xn As Double, nP As Long, k As Long
    Dim xG As Double, Xi As Double, xcd As Double, xni(7) As Double, Ni(7) As Double
    Dim dd As Double, hh As Double, auxAsup As Double, auxAinf As Double, auxMrd As Double
    Dim auxN() As Double, auxM() As Double
    Dim DN As Double, DX As Double
    Dim dInf As Double, dSup As Double
    DN = SezRett.DeltaN
    If DN <= 0 Then DN = 1
    DX = SezRett.DeltaX
    If DX <= 0 Then DX = 1
    dInf = SezRett.Copriferro_Inf
    dSup = SezRett.Copriferro_Sup
    If DIREZ = "Y" Then
        hh = SezRett.Altezza
        bX = SezRett.Base
        auxAinf = SezRett.As_inf
        auxAsup = SezRett.As_sup
        ReDim Nyrd(0) As Double
        ReDim Myrd(0) As Double
        SezRett.MrdY = 0
    Else
        hh = SezRett.Base
        bX = SezRett.Altezza
        auxAinf = SezRett.As_infY
        auxAsup = SezRett.As_supY
        ReDim Nzrd(0) As Double, Mzrd(0) As Double
        SezRett.MrdZ = 0
    End If
    dd = hh - dInf
    xG = hh / 2
    '
    Procedi = True
    On Error GoTo 100
    auxMrd = 0
    Xi = xG
    '
    xni(0) = (dSup * Mat.eps_ud - dd * Mat.eps_yd) / (Mat.eps_ud - Mat.eps_yd)
    xni(1) = 0
    xni(2) = 0.1666666666 * dd
    xni(3) = 0.35 * dd / 1.35
    xni(4) = dd * Mat.eps_cu / (Mat.eps_cu + Mat.eps_yd)
    xni(5) = dd
    xni(6) = hh
    xni(7) = 2000 * hh
    '
    'Regione 1
    For xn = xni(0) To xni(1) Step DN
        If xn > xni(1) Then xn = xni(1)
        eps1 = -Mat.eps_ud * (dSup - xn) / (dd - xn)
        If Abs(eps1) < Mat.eps_yd Then
            sigmaSup = Mat.Es * eps1
        Else
            sigmaSup = -Mat.fyd
        End If
        sigmaInf = -Mat.fyd
        nP = nP + 1
        ReDim Preserve auxN(nP)
        ReDim Preserve auxM(nP)
        auxN(nP) = sigmaSup * auxAsup + sigmaInf * auxAinf
        auxM(nP) = sigmaSup * auxAsup * (xG - dSup) - sigmaInf * auxAinf * (Xi - dInf)
        If xn = xni(0) Then Ni(0) = auxN(nP)
    Next xn
    'Regione 2a
    For xn = xni(1) To xni(2) Step DN
        If xn > xni(2) Then xn = xni(2)
        eps1 = Mat.eps_ud * (xn - dSup) / (dd - xn)
```

```

If eps1 < 0 Then
  If Abs(eps1) < Mat.eps_yd Then
    sigmaSup = -Mat.Es * Abs(eps1)
  Else
    sigmaSup = -Mat.fyd
  End If
Else
  If eps1 < Mat.eps_yd Then
    sigmaSup = Mat.Es * eps1
  Else
    sigmaSup = Mat.fyd
  End If
End If
sigmaInf = -Mat.fyd
nP = nP + 1
ReDim Preserve auxN(nP)
ReDim Preserve auxM(nP)
xx = 0
auxN(nP) = 0: auxM(nP) = 0
While xx <= xn
  sigmaX = (5 * Mat.fcd / (dd - xn) ^ 2) * (2 * (dd - xn) * (xn - xx) - 5 * (xn - xx) ^ 2)
  auxN(nP) = auxN(nP) + DX * sigmaX * bX
  auxM(nP) = auxM(nP) + DX * sigmaX * bX * (xG - xx)
  xx = xx + DX
Wend
auxN(nP) = auxN(nP) + sigmaSup * auxAsup + sigmaInf * auxAinf
auxM(nP) = auxM(nP) + sigmaSup * auxAsup * (xG - dSup) - sigmaInf * auxAinf * (Xi - dInf)
If xn = xni(1) Then Ni(1) = auxN(nP)
Next xn
. . . . .
. . . . .
On Error GoTo 0
Dim Nrd_sx As Double, Nrd_dx As Double
Dim Mrd_sx As Double, Mrd_dx As Double
' Calcola auxMrd
For k = 1 To nP
  auxN(k) = auxN(k) / 1000
  auxM(k) = auxM(k) / 1000000
  If auxN(k) <= SezRett.Ned_x Then
    Nrd_sx = auxN(k)
    Mrd_sx = auxM(k)
  End If
  If auxN(k) >= SezRett.Ned_x Then
    Nrd_dx = auxN(k)
    Mrd_dx = auxM(k)
  End If
  If Nrd_sx <= SezRett.Ned_x And SezRett.Ned_x <= Nrd_dx Then
    If Nrd_dx <> Nrd_sx Then
      auxMrd = Mrd_sx + (SezRett.Ned_x - Nrd_sx) * (Mrd_dx - Mrd_sx) / (Nrd_dx - Nrd_sx)
    Else
      auxMrd = Mrd_sx
    End If
  End If
End If
Next k
' copia variabili ausiliare in variabili specifiche a seconda della direzione di verifica
If Direz = "Y" Then
  ReDim Nyrd(nP) As Double, Myrd(nP) As Double
  For k = 1 To nP
    Nyrd(k) = auxN(k)
    Myrd(k) = auxM(k)
  Next k
  SezRett.MrdY = auxMrd
Else
  ReDim Nzrd(nP) As Double, Mzrd(nP) As Double
  For k = 1 To nP
    Nzrd(k) = auxN(k)
    Mzrd(k) = auxM(k)
  Next k
  SezRett.MrdZ = auxMrd
End If
On Error GoTo 0
Exit Sub
'
100
Procedi = False
msg = "Errore nel calcolo dei Valori di Nrd , Mrd" & Chr(10) + Err.Description
On Error GoTo 0
End Sub

```

14. Bibliografia

- [1] D.M. 14 gennaio 2008 “Norme Tecniche per le Costruzioni”;
- [2] Giangreco E. Teoria e Tecnica delle Costruzioni – Napoli 1982
- [3] La Tegola A. : “Teoria Semiprobabilistica” - Catania 1977;
- [4] Motta F. : “Le verifiche di sicurezza con il metodo semiprobabilistico agli stati limite” – Università Catania A.A. 1987/1988;
- [5] Zafonte M. “Appunti di Tecnica delle Costruzioni” – A.A. 1988/1989
- [6] Zafonte M. Tesi di Laurea – Catania 1994